UNIV OF TX AT AUSTIN - LIB STORAGE
04335441

2118839072
506 V641N V.11 1839 MAIN

506
V641n

LIBRARY
OF
THE·UNIVERSITY·OF·TEXAS

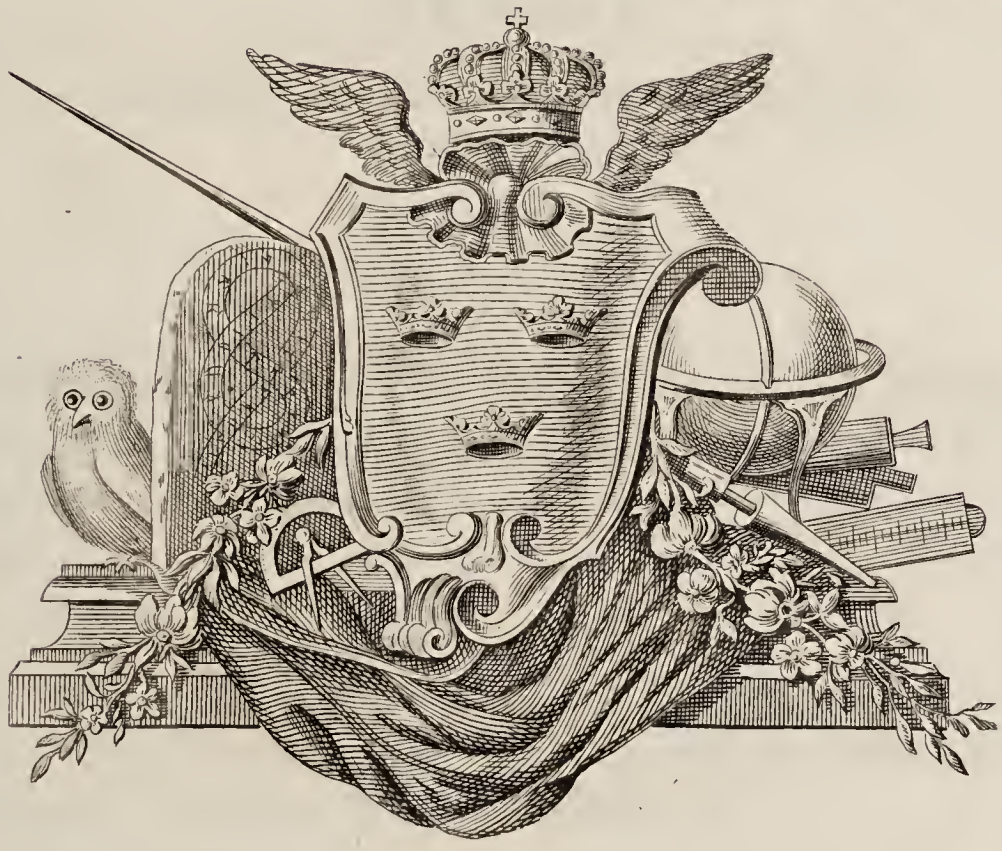
506
V64Hn
v.11

Digitized by the Internet Archive
in 2017 with funding from
IMLS LG-70-15-0138-15

https://archive.org/details/novaactaregiaeso1118kung

# NOVA ACTA
## REGIAE SOCIETATIS
# SCIENTIARUM
## UPSALIENSIS.

## VOL. XI.



**UPSALIAE**
EXCUD. LEFFLER ET SEBELL REG. ACAD. TYPOGR.
MDCCCXXXIX.

328509

SUB AUSPICIIS

ET CLEMENTISSIMO PRAESIDIO

SACRAE REGIAE CELSITUDINIS

SERENISSIMI PRINCIPIS AC DOMINI

# JOSEPHI FRANCISCI OSCARIS

REGNORUM SVECIAE ET NORVEGIAE

PRINCIPIS SUCCESSORIS

## MEMBRA

REGIAE SOCIETATIS SCIENTIARUM
UPSALIENSIS

*HONORARIA*

ROSENBLAD (Matthias), Comes, Juris utriusque Doctor, e Regni Proceribus unus, Rei Judiciariæ Minister Status supremus, Regiorum Ordinum Eques, Commendator et Cancellarius, Ord. Reg. Caroli XIII. Eques, Ordd. Imperial. S. Andreæ, S. Alexandri Newski et S. Annæ in Classe I. Eques.

JÄRTA (Hans), a. h. Secretarius Status et Gubernator Dalekarliæ, Archivi Regni Præfectus supremus, Reg. Ord. de Stella Polari Commendator, Academiæ Svecanæ Octodecimvir.

BRINKMAN (Carolus Gustavus von), Liber Baro, Philos. Doct., Cubicularius Regius, S:æ R:æ Majest. a. h. Legatus Extraordinarius, Commendator Reg. Ord. de Stella Polari, Academiæ Svecanæ Octodecimvir.

D'OHSSON (Constantinus), Liber Baro, Legatus S:æ R:æ Majest. Extraordinarius, Commendator Reg. Ord. de Stella Polari.

TEGNÉR (Esaias), S. Theol. Doctor, Episcopus Dioeceseos Wexionensis, Reg. Ord. de Stella Polari Commendator, Academiæ Svecanæ Octodecimvir.

AFZELIUS (Petrus von), Medicinæ Doctor, Sacræ Regiæ Majestatis Archiater Primarius, Medicinæ Professor Upsaliensis emeritus, Reg. Ord. Wasæi, cum grandiori Crucis insigni, Commendator, Reg. Ord. de Stella Polari Eques.

TROLLE WACHTMEISTER (Hans Gabriel), Comes, e Regni Proceribus unus, Justitiæ quondam Cancellarius, Regiorum Ordinum Eques et Commendator.

FRANZÉN (Franciscus Michaël), S. Theologiæ Doctor, Dioeceseos Hernösandensis Episcopus, Reg. Ord. de Stella Polari Commendator, Academiæ Svecanæ Octodecimvir.

LÖWENHJELM (Gustavus), Comes, e Regni Proceribus unus, Legatus Sacræ Regiæ Majest. Extraordinarius, Dux Generalis, Regiorum Ordinum Eques et Commendator, Reg. Ord. Ensiferor. in Cl. II. Eques, Ordd. Imperial. S. Annæ in Cl. I. et S. Wladimiro in Cl. II. Ord. Reg. de Aquila Rubra in Cl. I. Eques, Ord. S. Johannis Hierosolymitani Commendator, cet.

BRAHE (Magnus), Comes, e Regni Proceribus unus, Regni Mareschallus, Sacræ Regiæ Majestati a mandatis militaribus Generalis supremus, Reg. Academiæ Militaris Cancellarius, Regiorum Ordinum Eques et Commendator, Reg. Ord. Caroli XIII. Eques, Ordd. Imperial. S. Andreæ, S. Alexandri Newski et S. Annæ in Cl. I. Eques, Reg. Ord. Græciæ de S. Salvatore, cum grandiori Crucis insigni, Commendator, cet.

WINGÅRD (Carolus Fridericus A), S. Theol. Doctor, Ecclesiæ Sveogothicæ Archiepiscopus, Academiæ Upsaliensis Procancellarius, Reg. Ord. de Stella Polari Commendator, Academiæ Svecanæ Octodecimvir.

## *ORDINARIA*

GYLLENHAL (Leonhardus), Excubiarum Præfectus, Eques Regii Ordinis Wasæi.

SVANBERG (Jöns), S, Theol. Doctor, Mathematum Professor Upsaliensis, Membrum Reg. Ord. de Stella Polari, Regiæ Societatis Secretarius.

GRÅBERG (Jacobus), Philos. Doctor, Comes Palatinus, Regnor. Svec. et Norveg. in Urbe Tripolitana a. h. Consul, Eques Reg. Ord. Wasæi, Reg. Ord. de S. Mauritio et Lazaro nec non de Leone Belgico Eques, cet.

BERZELIUS (Jacobus) Liber Baro, Med. Doctor, Reg. Collegii Sanitatis Assessor et Chemiæ Professor, Reg. Acad. Scientiar. Holmiensis Secretarius, Reg. Ord. Wasæi cum grandiori Crucis insigni Commendator, Reg. Ord. de Stella Polari Eques, Reg. Ord. Legionis Honorariæ, de S. Stanislao et de Aquila rubra in Cl. II. Eques, Academiæ Svecanæ Octodecimvir.

BREDMAN (Johannes) Astronomiæ Professor Upsaliensis, Eques Reg. Ord. de Stella Polari.

TANNSTRÖM (Nicolaus Martinus A) Regiæ Cancellariæ Consiliarius, Eques Reg. Ord. de Stella Polari.

GEIJER (Ericus Gustavus) Historiarum Professor Upsaliensis, Eques Reg. Ord. de Stella Polari, Academiæ Svecanæ Octodecimvir.

LAGERHJELM (Petrus) Regii Collegii Metallici Assessor, Eques Reg. Ord. de Stella Polari.

WAHLENBERG (Georgius) Med.Doctor, Medicinæ et Botanices Professor Upsaliensis, Eques Reg. Ord. de Stella Polari.

CRONSTRAND (Simon Andreas), Reg. Acad. Scient. Stockh. Astronomus et Professor, Eques Reg. Ord. de Stella Polari.

AGARDH (Carolus Adolphus), Dioeceseos Carolstadiensis Ordinumque Regiorum Episcopus, Reg. Ord. de Stella Polari Commendator, Academiæ Svecanæ Octodecimvir.

HANSTEEN (Christophorus), Matheseos Professor Christianiensis, Eques Reg. Ord. de Stella Polari.

WALMSTEDT (Laurentius Petrus), Chemiæ Professor Upsaliensis, Eques Reg. Ord. de Stella Polari.

ROMANSON (Henricus Guilielmus), Med. Doctor, Anatomiæ et Chirurgiæ Professor Upsaliensis, Eques Reg. Ord. de Stella Polari.

SJÖBRING (Petrus), Linguarum Orientalium Professor Upsaliensis, Eques Reg. Ord. de Stella Polari.

SCHRÖDER (Johannes Henricus), Historiæ Litterariæ et Archæologiæ Professor Upsaliensis, Bibliothecarius Academiæ, Præfectus Nummophylacii, Reg. Ord. Historiographus.

RABENIUS (Laurentius Georgius A), Juris utriusque Doctor, Jurisprudentiæ, Oeconomiæ et Commerciorum Professor Upsaliensis emeritus, Eques Reg. Ord. de Stella Polari.

HWASSER (Israël), Med. Doctor, Medicinæ Professor Upsaliensis, Ord. Imperial. S. Wladimiri in Cl. IV. Eques.

AGRELL (Carolus Magnus), S. Theol. Doctor, Pastor et Præpositus in Skatelöf Smolandiæ, Membrum Reg. Ord. de Stella Polari.

FRIES (Elias), Oeconomiæ practicæ Professor, Upsaliensis, Eques Reg. Ord. de Stella Polari.

HISINGER (Guilielmus A), Officinæ Ferrariæ Possessor, Eques Reg. Ord. de Stella Polari.

EKSTRÖM (Carolus Udalricus), Pastor et Præpositus Tjörnensis in Dioecesi Gothoburgensi.

SVANBERG (Adolphus Ferdinandus), Mathem. Docens ad Scholam Milit. Mariæberg.

SEFSTRÖM (Nicolaus Gabriel), Med. Doctor, Instituti Metallurgici Fahlunensis Præfectus et Professor, Reg. Ord. de Stella Polari nec non Ord. Imperial. S. Annæ in Cl. II. Eques.

RETZIUS (Andreas Adolphus), Med. Doctor, Anatomiæ Professor Holmiensis, Eques Reg. Ord. de Stella Polari.

PALIN (Nicolaus Gustavus A), Sacræ Regiæ Majest. a h. Legatus ad Portam Othomannicam, Eques Reg. Ord. de Stella Polari.

HEDENBORG (Johannes), Med. Doctor et Professor, Consulatus Svec. et Norveg. Alexandriæ Secretarius, Reg. Ord. de Stella Polari et de Wasa Eques.

SCHÖNHERR (Carolus Johannes), Reg. Collegii Commerciorum Consiliarius, Eques Reg. Ord. de Stella Polari.

GYLLENSTIERNA (Nicolaus Christophorus), Liber Baro, Cubicularius Regius, Reg. Ord. Ensiferorum Eques.

LÆSTADIUS (Laurentius Levinius), Pastor Ecclesiæ Karasuando Lapponiæ.

## *ADJUNCTUS*

MARKLIN (Gabriel), Regiæ Societatis Bibliothecarius et Musei Naturalium Præfectus.

## *SOCII EXTERI*

GAUSSEN (Johannes de), Membrum Societatis Scientiar. Montispessulanæ.

GADOLIN (Johannes), Chemiæ Professor Aboënsis emeritus, Ord. Imperial. S. Wladimiri in Cl. IV. Eques.

FABRE (M. C.), Collegii, pontibus aggeribusque publicis in Gallia præpositi, Præfectus.

LOBO DE SILVEYRA (Joachim A), Comes.

FRÆHN (Christianus Martinus), S. Theol. et Philos. Doctor, Imp. Ross. a Consiliis Status, Academiæ Imperial. Scientiar. Petropolitanæ sodalis ordinarius, Musei Asiatici Director et Bibliothecæ Præfectus Primarius, Ord. S. Wladimiri in Cl. III. et S. Annæ in Cl. II. Eques.

STEFFENS (Joh. Henr.), Philos. Doctor, Philosophiæ Professor Berolinensi, Eques de Ferrea Cruce.

ARAGO (Fransiscus Joh. Dominic.), Instituti Parisiensis Membrum et Reg. Academiæ Scientiarum in Classe Mathemat. Secretarius, Reg. Ord. Legionis Honor. Eques.

HUMBOLDT (Alexander von), Liber Baro, Regi Boruss. a Consiliis ntimis, Reg. Ord. de Aquila rubra, Reg. Gall. Legionis Honor. Ord. Imperial. S. Annæ in Cl. I. Eques, cet.

FUSS (Paulus Henricus), Academiæ Scientiarum Petropolitanæ Secretarius Ord. Imperial. S. Annæ in Cl. II. et S. Wladimiri in Cl. III. Eques.

POISSON (S. D.), Liber Baro, ad Scholam Polytechn. Paris. Mathem. Professor, Instituti Paris. Membrum.

GAY-LUSSAC (Ludov. Jos.), ad Scholam Polytechn. Paris. Chemiæ Professor, Instituti Paris. Membrum, Reg. Ord. Leg. Honor. Eques.

BESSEL (Frider. Guil.), Astronomiæ Professor Regiomont. Reg. Ord. de Aquila rubra in Cl. III. et de Danebrog. Eques.

BIOT (J. B.), Instituti Paris. Membrum, Reg. Ord. Leg. Honor. Eques.

DECANDOLLE (Aug. Pyramus), Botanices Professor Genevensis.

BUCH (Leopold. von), Regi Boruss. a Cubiculis, Reg. Ord. de Aquila rubra Eques.

BROWN (Robert.), Juris Utr. Doctor, Reg. Societ. Londinens. Socius.

KRUCHENBERG (Petr.), Medicinæ Professor Hallensis.

GRIMM (Jacob.), a. h. Hist. Litt. Professor Gottingensis.

MIONNET (Theodor. Edm.), Reg. Numophylacii Paris. Præfectus, Instituti Paris. Membrum, Reg. Ord. Leg. Honor. Eques.

WERLAUFF (Eric. Christian.), Regi Dan. a Consiliis Conferent., Histor. Professor Hafniensis, Bibliothecæ Regiæ Præfectus, Reg. Ord. Dannebrog. Eques.

MÜLLER (Joh.), Anatomiæ Professor Berolinensis.

MAI (Angelus), Sacræ Romanæ Ecclesiæ Cardinalis et Bibliothecarius.

BONAPARTE (Carolus Lucianus), Princeps de Mussignano.

SCHULTÉN (Nathan. Gerhard A), Mathem. Professor Helsingforsiensis, Ord. Imper. S. Annæ in Cl. II. Eques.

SCHUMACHER (Henr. Christian.), Astronomiæ Professor Hafniensis, Reg. Ord. Danebrog. Commendator et de Stella Polari Eques.

ENCKE (J. F.), Astronomiæ Professor Berolinensis, Reg. Acad. Scientiar. ibid. in Classe Phys. Mathem. Secretarius, Reg. Ord. de Aquila rubra in Cl. IV. Eques.

TEMMINK (C. J.), Musei Zoologici Leidensis Inspector.

BOECKH (Aug.), Græc. Litt. Professor Berolinensis, Reg. Acad. Scientiar. ibid. in Classe Histor. Secretarius, Reg. Ord. de Aquila rubra in Cl. IV. Eques.

GESENIUS (Guil.), S. Theol. Doctor et Professor Hallensis.

## *SOCII LITTERARUM COMMERCIO CONJUNCTI*

RAFN (Carolus Christianus), Reg. Dan. a Consiliis Status, Professor, Reg. Societatis Antiquariorum Hafniensis Secretarius, Reg. Ord. de Stella Polari et de Danebrog. Eques.

GRETCH (Nicolaus), Imp. Ross. a Consiliis Status, Academiæ Imperial. Scientiarum Petropolitanæ Bibliothecarius, Ord. Imperial. S. Annæ in Cl. II. Eques.

**Libri ab Amicis & Fautoribus Regiæ Societati Scientiarum Upsaliensi, inde ab edito Actorum Volumine X:mo dono dati.**

Flora Batava. Part. 99—104; 107—113. 115—117.

*(Munus Augustissimi Regis Hollandiæ.)*

Memoires presentés par divers Savans à l'Academie Royale des Sciences de l'Institut de France. Sciences Mathematiques & Physiques. Tom. IV. XII. Paris 1833. Qu.

*(Munus Instituti Scientiar. Parisiensis.)*

Astronomical Observations made at the Royal Observatory at Greenwich, under the direction of John Pond and George Biddel Airy. London, Juli—Dec. 1834, 1835, 1836, 1837. Fol. & Qu.

*(Munus Reg. Societ. Scientiar. Londinens.)*

Memoires de l'Académie Imp. des Sciences de St. Pétersbourg. VI:me Série. Sciences Mathem., Phys. & Naturelles. Tom. III, IV. St. Petersb. 1835, 1836. Qu.

—— —— Sciences Polit., Hist., Philol. T. I—IV: 1—3:me Livr. St. Petersb. 1830—1837. Qu.

Memoires presentés à l'Academie Imperiale de Sciences de St. Petersbourg par divers Savans. Tom. I—III: I & II Livr. ib. 1830—36. Qu.

*(Munus Acad. Imperial. Scientiar. Petropol.)*

Recueil des Actes de la Seance publique de l'Academie Imperiale des Sciences de St. Petersb. 1833, 1835, 1836. St. Petersb. 1833—37. Qu.

Struwe, F. G. W., Stellarum Duplicium & Multiplicium Mensuræ Micrometricæ, annis 1824 ad 1837 institutæ. Adjecta Synopsi Observationum de Stellis compositis. — Petropoli 1837. F.

*(Munus Acad. Imp. Scientiar. Petropol.)*

Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1832—1836. Vol. V. Qu.

Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Juli—Dec. 1837. Jan.—Junii 1838. O.

*(Munus Reg. Acad. Scientiar. Berolinens.)*

Det Kongel. Danske Videnskabernes Selskabs Historiske og Philosophiske Afhandlinger. 5:e Del. Kiöpenh. 1836. Qu.

—— —— NaturVidenskablige og Mathematiske Afhandlinger 6:e Del. ib. 1837. 7:e Del. ib. 1838. Qu.

Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbeider fra 31 Maji 1833 till 31 Maji 1836; — 1836—7; — 1838 af H. C. Örsted. Qu.

*(Munus Reg. Societ. Scientiar. Hafniens.)*

Memoires de la Societé de Physique & d'Histoire naturelle de Geneve. Tom. VI, VII: Part. I, II. Geneve 1832—1836. Qu.

*(Munus Societ. Phys. Genev.)*

Transactions of the American Philosophical Society. Vol. IV. V. New Series. Part. I. II. III. Philadelphia 1834, 35, 37. Qu.

*(Munus Societ. Scientiar. Philadelph.)*

Berättelse utgifven vid Svenska Akademiens femtionde årsfest den 5:te April 1836. O.

*(Munus Academiæ Svecanæ, unacum Numismate argenteo in memoriam Jubilæi procuso.)*

Hugenii Christ., aliorumque Sec. XVII. Viror celeb. Exercitt. Mathemat. & Philosoph., ex MSS. edid. P. Joannes Uylenbroek. Fasc. I, II. Hagæ 1833. Qu.

Kramer, P., De Uitlandsche Kapellen. Tom. I—IV. Amsterd. 1779. Planch. Tom. I—IV. Qu.

Esper, E. J. C., Die Schmetterlinge in Abbildungen nach der Natur mit Beschreibungen. Th. I—IV. 1777—1786. Vol. IX. V:er Theil 1794 pag. 1—276. Tabb. 1—52. — Supplbm. 1—4. 1805. Qu.

Olivier, M., Entomologie ou Histoire Naturelle des Insectes. Tom. 1—6. Paris 1789—1808. Tom. 7, 8 Figg. ib. 1808. Qu.

*(E Bibliotheca D. Leon. Gyllenhal.)*

Account of the Great Historical Work of the African Philosopher Ibn Khaldu'n. London 1833. Qu.

*(Munus D. Gråberg.)*

Cour des Pairs. Rapport fait a la cour par M. le Comte Portalis. Avec Plans annexes au Rapport. — Paris 1835. Qu.

Comte Général de l'administration de la Justice civile et commerciale en France. Paris 1835. Qu.

*(Munus Illustr. Com. G. DE LÖWENHIELM.)*

Tables appartenant a l'Architecture Civile par C. F. DE WIBEKING. (s. l.) 1831.

WRIGHT, W. VON et EKSTRÖM, C. U., Skandinaviens Fiskar. H. 1—5. Stockholm 1835, 36. Qu.

*(Munus D. EKSTRÖM.)*

WERLAUFF, E. C., Bidrag till den Nordiske Ravhandels Historie. (Aftr. ur K. Danske Vidensk. Selsk. Skr.) Kiöbenhavn 1835. Qu.

Anniversaria in memoriam Reipublicæ Sacræ & Litterariæ celebranda indicit Reg. Universitatis Havinensis Rector c. Senatu Academico. Havniæ 1832. O.

Biographiske Efterretninger om ARNE MAGNUSSEN, ved JON OLAFSEN, — udg. med Inledn., Bemærkn. og Tillæg af E. C. WERLAUFF. Kiöbenh. 1835. O.

*(Munus D. WERLAUFF.)*

A Catalogue of Circumpolar Stars, deduced from the Observations of STEPH. GROOMBRIDGE. Reduced to Jan. 1, 1810. Edit. by GEORGE BIDDEL AIRY. London 1838. Qu.

*(Munus Editoris.)*

DAHLBOM, GUST., Clavis Novi Hymenopterorum Systematis, adjecta Synopsi Larvarum ejusdem ordinis Scandinavicarum cruciformium. Lund 1835. Qu.

Dahlbom, Gust., Prodromus Hymenopterologiæ Scandinavicæ. Lundæ 1836. O.

——, ——, Kort underrättelse om Skandinaviska Insekters allmännare Skada och Nytta i Hushållningen. Lund 1837. O.

*(Munus Auctoris.)*

L'Almanach de France. Annee 1833. Par. e. a. O.

*(Munus Illustr. Com. G. de Löwenhielm.)*

Memoire Explicatif des Phénomenes de L'Aiguille Aimantée, par Demonville. Paris 1833. O.

*(Munus Auctoris.)*

Rask, Rasm., Ræsonneret Lappisk Sproglære. Kiöbenh. 1832. O.

*(Munus Auctoris.)*

Gråberg, Jac., Dei Progressi della Geografia e della sua Litteratura &c. Firenze 1832. O.

——, ——, Notizia intorno alla famosa opera istorica d'Ibn Khaldu'n. ib. 1834. O.

——, ——, Catalogo delle opere più o meno estese. Firenze 1837. D.

*(Munus Auctoris.)*

(Palin, N. G. de) Observations Numismatiques, dediés à Thorwaldsen. Roma 1833. O.

*(Munus Auctoris.)*

Memoire sur la conservation des Matieres Animales, par J. N. Gannal. Paris 1836. O.

D'Ohsson, C., Histoire des Mongols, depuis Tchinguiz-Khan jusqu' a Timour Bey ou Tamerlan. — Tom. I—IV. 1834, 1835. O.

*(Munus Auctoris.)*

Hammer, Jos. von, Uber die Länderverwaltung unter dem Chalifate. Berlin 1835. O.

*(Munus Auctoris.)*

Dictionnaire des Hommes des Lettres, des Savans & des Artistes de la Belgique. Bruxelles 1837. O.

Positions Géografiques de l'Oby depui Tobolsk jusque a la mer glaciale corrigées par Ad. Erman. Berlin 1831. O.

Struwe, F. G. W., Ueber Doppelsterne. Petersb. 1837. O.

*(Munus Acad. Imp. Scientiar. Petrop.)*

Wahlenberg, G., Historisk underrättelse om Upsala Universitets Botaniska Trägård 1836. Upsala 1837. O.

*(Munus Auctoris.)*

Schultén, Nath. Gerh. af, Logarithmiska och Trigonometriska Tabeller. Helsingfors 1838. D.

*(Munus Auctoris.)*

Fasti Rectorum Regiæ Academiæ Upsaliensis. Edidit Joh. Henr. Schröder. Upsaliæ 1838. O.

*(Munus Editoris.)*

Sancti Ambrosii Sermones e Sessoriano Codice editi. Romæ 1834. Qu.

C. C. Rafn, Memoria sulla scoperta dell' America nel secolo X: tradotta da Jac. Gråberg. Pisa 1839. O.

*(Munus D. Gråberg de Hemsö.)*

Kupffer, A. T., Observations Météorologiques et Magnétiques faites dans l'Étendue de l'Empire de Russie. N:o I. II. S:t Pétersb. 1837. Qu.

*(Munus Acad. Imper. Scient. Petropol.)*

Collectanea Meteorologica sub auspiciis Societatis Scientiarum Danicæ edita. Fasc. II. Hafniæ 1839. Qu.

*(Munus R. Societ. Scient. Hafniens.)*

Brown, Rob., Observations on the Organs and Mode of Fecundation in Orchideæ and Asclepiadeæ. London 1831. O.

*(Munus Auctoris.)*

Fisher, J. F., A Discourse on the private Life and Domestic Habits. Philadelphia 1836. O.

A Memoir on the History of the celebrated Treaty made by William Penn with the Indians in the year 1682. By P. S. du Ponceau and J. Francis Fisher. Philadelphia 1836. O.

*(Munus Auctoris.)*

Tale ved det K. Videnskabernes Selskabs Mindefest over dets Præses Adam Wilh. Hauch, af H. C. Örsted. Kiöbenhavn 1838. O.

*(Munus D. Örsted.)*

Don, D., Descriptions of two new Genera of the Natural Family of Plants called Coniferæ. Lond. s. a. O.

*(Munus Auctoris.)*

Kongl. Tabell-Commissionens Underd. Berättelse till K. Maj:t den 30 Apr. 1838 angående Nativitetens och Mortalitetens förhållande i Sverige åren 1831—1835 m. m. Sthm 1838. Qu.

*(Munus Reg. delegatorum Tabularum censoriarum.)*

Cenni sulla Organografia e Fisiologia delle Alghe del Dottore Giuseppo Meneghini. Padova 1838. Qu.

*(Munus Auctoris.)*

---

Ad calcem, gratissimo animo significare oportet incrementa eaque magnifica, quæ Museo Regiæ Societatis haud ita pridem accessere ex Collectionibus Entomologicis ditissimis, quas in deliciis habuit Nobiliss. Leonardus Gyllenhal, Regii Ordinis de Wasa Eques auratus, Regiæ Societatis Scientiarum Upsaliensis Senior, annis meritisque gravissimus, et omnes singulasque curæ ac tutamini Societatis nostræ, certis conditionibus jam traditas voluit. Anno 1837 ad finem vergente, cura *Marklinii* nostri fatigari nescia, totus adparatus Entomologicus, XIV loculis inclusus, e Tusculo Gyllenhaliano *Höberg* WestroGothiæ Upsaliam felici omine advectus est. Nostris sub auspiciis Insecta Svecica Coleoptera, quæ

omni studio collegit, et IV. voluminibus, Skaris 1808—1813 et Lipsiæ 1827 typis editis, adcuratissime descripsit Nob. *Gyllenhal*, ut Collectanea prototypa, peculiari in armario, Præfectus Musei nostri meritissimus disposuit, in usum posteritatis religiosissime conservanda. — Collegæ interim devenerando, fraternæ munificentiæ*) æmulo, annum octavum supra octogesimum feliciter auspicanti, fausta quævis et serena pio ex animo adprecamur!

---

*) *Johannes Abrah. Gyllenhal*, Rei Metallicæ Præfectus, an. 1788 moriturus Regiam Societatem Scientiar. Upsaliensem hæredem scripsit, cui proposito illius in bona succedens frater natu minor ***Leonardus***, omnem dein vim conciliavit, quam patriæ requirunt Leges. Vid. Nova Acta Reg. Societatis Scientiarum Upsal. Vol. V. pag. XII. Cfr. *Er. Prosperin*, Tal om Kongl. Vetenskaps-Societeten i Upsala. Stockh. 1791, pag. 55.

# INDEX

## ACTORUM.

I. De Seriebus Periodicis adnotationes. Auctore Adolpho Ferdinando Svanberg . . . . . pag. 1.

II. Disquisitionum in Theoriam Refractionum Astronomicarum Pars Secunda. Auctore Jöns Svanberg . . . . . pag. 29.

III. Loca Parallela Plantarum, seu Animadversiones Physiologico-Botanicæ de variis Plantarum variationibus, præcipue in Svecia Boreali observatis, quarum Conspectum, cum suis causis atque effectibus illustratum, breviter exposuit Laurentius Lev. Laestadius, Eccles. Karesuandensis in Lapponia Pastor . . pag. 203.

IV. Primordia dominationis Murabitorum, e libro arabico vulgo *Kartâs* inscripto, auctore *Abu-l-hhassano Ibn Abi Zera'*, collatis Codicibus Bodleianis, Leidensi, Parisinis et Upsaliensi, edidit Car. Joh. Tornberg, in Acad. Upsal. Litter. Arab. Docens . . . . . pag. 297.

# ACTA
## SOCIETATIS REGIAE
# SCIENTIARUM

DE

## SERIEBUS PERIODICIS
## ADNOTATIONES

AUCTORE

ADOLPHO FERDINANDO SVANBERG.

Data quacumque anguli cujusdam functione, quam in seriem evolvere propositum sit, quæ secundum sinus vel etiam secundum cosinus multiplorum ejusdem anguli pro-

grediatur, licebit utique semper coëfficientem cujuscunque termini per integrale definitum exhibere, quod intra limites $0$ et $\pi$ sumatur. Cum autem hunc etiam ipsum, definitum licet, integralis cujuscunque valorem invenire sæpenumero admodum difficillimum sit, neque directæ omnino suppetant methodi, quibus aditum nobis aperiamus ad problema, de quo agitur, summa, quam animo quis concipere valeat, universalitate absolvendi, indirecte etiam hoc idem adgressi sumus problema, atque sic omnino animadvertenda quædam sese nobis obtulerunt, quæ cum naturam serierum periodicarum quoddammodo illustrare, tum insignem quoque allatura visa sunt utilitatem in ipsis determinandis coëfficientibus. Scilicet dato quolibet integrali $\int f(r,x)\,dx$ intra limites $0$ et $\pi$ sumendo, ponamus adeo $y=\int_0^\pi f(r,x)\,dx$; erit utique ostendendum, ex hac æquatione differentialem inter $y$ et $r$ semper obtineri posse, ex qua tandem definietur $y$, si modo $f(r,x)$ ejusmodi fuerit functio, ut in seriem explicari possit, quæ secundum cosinus multiplorum anguli $x$ progrediatur, cujusque æquationis differentialis utilitatem ostendemus per applicationem ad problema in Astronomia celebratissimum, quo ex data anomalia media anomalia quæratur vera.

§. 1.

## §. 1.

Si functio quæcunque $f$ ipsius $r$ et anguli $x$ evoluta præbeat seriem hujusce formæ

$$f(r, x) = A + 2A_1 \operatorname{Cos} x + 2A_2 \operatorname{Cos} 2x + 2A_3 \operatorname{Cos} 3x + \text{etc.}$$

ob formulas cognitas

$$\int_0^\pi \operatorname{Cos}^2 mx \,.\, dx = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \int_0^\pi \operatorname{Cos} mx \,.\, \operatorname{Cos} nx \,.\, dx = 0\,,$$

ubi sit

$$m > 0 \quad \text{et} \quad n > \text{ vel } < m\,,$$

erit generaliter

$$A_m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(r, x) \operatorname{Cos} mx \,.\, dx\,,$$

ex quo patet $A_m$ functionem esse ipsius $r$. Ut æquationem differentialem, ad hunc definiendum, jam indagemus, ponamus

$$y = f(r, x),$$

et ex natura functionis $f$ inter quantitates $y, \frac{dy}{dx}, \frac{dy}{dr}, \frac{d^2y}{dx^2}$ etc. duæ æquationes lineares quærantur, quæ tales sint, ut coëfficientes harum quantitatum functiones algebraicæ et rationales ipsorum $\operatorname{Cos} x$ et $\operatorname{Sin} x$ sint. Ex his tum æquationibus aliæ inter coëfficientes $A_m$, $\frac{dA_m}{dr}$, $Am + 1$, $\frac{dA_{m+1}}{dr}$ etc. facile formari possunt; unde, per eliminationem reliquarum quantitatum, æquatio differentialis ad $A_m$ determinandum tandem obtineri potest. Methodus,

quam heic paucis verbis indicavimus, in sequentibus, per applicationem ad casus speciales abunde explicabitur.

Functiones, quæ secundum sinus multiplorum anguli cujusdam variabilis progrediuntur, eodem omnino modo tractari possunt; hic autem casus etiam facile ad alterum transformari potest. Si enim $z$ talis functio anguli $x$ sit, ut evoluta seriem sequentis formæ præbeat

$$z = Bx + 2B_1 \operatorname{Sin} x + 2B_2 \frac{\operatorname{Sin} 2x}{2} + 2B_3 \frac{\operatorname{Sin} 3x}{3} + \text{etc.}$$

erit quidem

$$\frac{dz}{dx} = B + 2B_1 \operatorname{Cos} x + 2B_2 \operatorname{Cos} 2x + 2B_3 \operatorname{Cos} 3x + \text{etc.}$$

ideoque

$$B_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{dz}{dx} \operatorname{Cos} mx \,.\, dx \quad ;$$

unde perspicuum est $B_m$, eum eandem omnino habeat formam ac $A_m$, eodem etiam modo tractari posse.

## §. 2.

Statuamus exempli caussa

$$y = f(r \operatorname{Cos} x) \,,$$

ubi $f$ functionem quamlibet designet, unde, per differentiationes respectu litterarum $r$ et $x$, sequentes duæ æquationes obtinentur

$$\frac{dy}{dr} = \operatorname{Cos} x \,.\, f'(r \operatorname{Cos} x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$-\frac{dy}{dx} = r \operatorname{Sin} x \,.\, f'(r \operatorname{Cos} x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

atque, si ex his $f'(r \operatorname{Cos} x)$ eliminetur,

$$\operatorname{Cos} x \,.\, \frac{dy}{dx} + r \operatorname{Sin} x \,.\, \frac{dy}{dr} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Fingatur jam pro $y$ series

$$y = A + 2A_1 \operatorname{Cos} x + 2A_2 \operatorname{Cos} 2x + 2A_3 \operatorname{Cos} 3x + \text{etc.},$$

unde colligitur

$$-\frac{dy}{dx} = 2A_1 \operatorname{Sin} x + 4A_2 \operatorname{Sin} 2x + 6A_3 \operatorname{Sin} 3x + \text{etc.};$$

$$\frac{dy}{dr} = \frac{dA}{dr} + 2\frac{dA_1}{dr} \operatorname{Cos} x + 2\frac{dA_2}{dr} \operatorname{Cos} 2x + 2\frac{dA_3}{dr} \operatorname{Cos} 3x + \text{etc.}$$

Si hæ series in æquatione (3) substituantur, ob formulas cognitas

$$2 \operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} \lambda x = \operatorname{Sin} (\lambda - 1)x + \operatorname{Sin} (\lambda + 1)x \,,$$

$$2 \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} \lambda x = -\operatorname{Sin} (\lambda - 1)x + \operatorname{Sin} (\lambda + 1)x \,,$$

fiet adeo

$$0 = \left.\begin{aligned} &-2A_2 \\ &-r\frac{dA_2}{dr} \\ &+r\frac{dA}{dr} \end{aligned}\right\} \operatorname{Sin} x \quad \left.\begin{aligned} &-3A_3 \\ &-A_1 \\ &-r\frac{dA_3}{dr} \\ &+r\frac{dA_1}{dr} \end{aligned}\right\} \operatorname{Sin} 2x \quad \left.\begin{aligned} &-4A_4 \\ &-2A_2 \\ &-r\frac{dA_4}{dr} \\ &+r\frac{dA_2}{dr} \end{aligned}\right\} \operatorname{Sin} 3x + \text{etc.}$$

unde, singulis terminis nihilo æqualibus positis, obtinebitur

$$r\frac{dA_2}{dr} + 2A_2 = r\frac{dA}{dr},$$

$$r\frac{dA_3}{dr} + 3A_3 = r\frac{dA_1}{dr} - A_1,$$

$$r\frac{dA_4}{dr} + 4A_4 = r\frac{dA_2}{dr} - 2A_2,$$

et generatim quidem

$$r\frac{dA_m}{dr} + mA_m = r\frac{dA_{m-2}}{dr} - (m-2)A_{m-2} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Multiplicetur hæc æquatio per $r^{m-1}dr$; quo facto, per integrationem colligitur

$$r^m A_m = \int r^m dA_{m-2} - (m-2)\int r^{m-1} A_{m-2} \cdot dr,$$

sive ob

$$\int r^m dA_{m-2} = r^m A_{m-2} - m\int r^{m-1} A_{m-2} \cdot dr,$$

$$r^m A_m = r^m A_{m-2} - 2(m-1)\int r^{m-1} A_{m-2} \cdot dr,$$

vel denique

$$A_m = A_{m-2} - \frac{2(m-1)}{r^m}\int r^{m-1} A_{m-2} \cdot dr \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Si itaque primi duo coëfficientes $A$ et $A_1$ quomodocunque sint cogniti, reliqui omnes ex hac formula facili negotio formari possunt. Quod autem hæc tam simplex in-

ter coëfficientes relatio existat, quæcunque sit functio $f(r\,\mathrm{Cos}\,x)$, attentione dignum admodum mihi videtur.

Statuamus jam

$$f^1(r\,\mathrm{Cos}\,x) = B + 2B_1\,\mathrm{Cos}\,x + 2B_2\,\mathrm{Cos}\,2x + 2B_3\,\mathrm{Cos}\,3x + \text{ etc.},$$

unde, ob formulam cognitam

$$2\,\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Cos}\,\lambda x = \mathrm{Cos}(\lambda-1)x + \mathrm{Cos}(\lambda+1)x\,,$$

ex æquatione (1) obtinetur

$$\frac{dA}{dr} + 2\frac{dA_1}{dr}\,\mathrm{Cos}\,x + 2\frac{dA_2}{dr}\,\mathrm{Cos}\,2x + \text{ etc.} =$$

$$\left.\begin{matrix} B_1 + B \\ + B_2 \end{matrix}\right\}\mathrm{Cos}\,x \left.\begin{matrix} + B_1 \\ + B_3 \end{matrix}\right\}\mathrm{Cos}\,2x + \text{ etc.},$$

hincque sequentes derivantur determinationes

$$B_1 = \frac{dA}{dr}\,,\quad B + B_2 = 2\frac{dA_1}{dr}\,,\quad B_1 + B_3 = 2\frac{dA_2}{dr}$$

et generatim quidem

$$B_{m-1} + B_{m+1} = 2\frac{dA_m}{dr}\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

quæ formula, ob $B_{-1} = B_1$, pro valore speciali $m = 0$ etiam valet. Eodem omnino modo ex formula (2) adipiscimur

$$rB_{m-1} - rB_{m+1} = 2mA_m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Ex æquationibus (6) et (7) jam colligitur

$$rB_{m-1} = r\frac{dA_m}{dr} + mA_m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$rB_{m+1} = r\frac{dA_m}{dr} - mA_m \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

unde, si in hac postrema $m$ mutetur in $m-2$, per eliminationem ipsius $B_{m-1}$ formula (4) prodit.

Statuamus similiter

$$f''(r\,\mathrm{Cos}\,x) = C + 2C_1\,\mathrm{Cos}\,x + 2C_2\,\mathrm{Cos}\,2x + 2C_3\,\mathrm{Cos}\,3x + \mathrm{etc.},$$

unde perspicuum fit, coëfficientes, littera $C$ designatos, eodem modo ex $B$ pendere, quo $B$ ex $A$ pendent: quamobrem, si in æquationibus (8) et (9) $B$ mutetur in $C$ et $A$ in $B$, obtinebitur

$$rC_{m-1} = r\frac{dB_m}{dr} + mB_m \ ,$$

$$rC_{m+1} = r\frac{dB_m}{dr} - mB_m \ .$$

Ex hac postrema æquatione, mutando $m$ in $m-1$, colligimus

$$C_m = \frac{dB_{m-1}}{dr} - \frac{m-1}{r}B_{m-1}$$

atque, cum sit ex æquatione (8)

$$B_{m-1} = \frac{dA_m}{dr} + \frac{m}{r}A_m \ ,$$

unde per differentiationem obtinetur

$$\frac{dB_{m-1}}{dr} = \frac{d^2A_m}{dr^2} + \frac{m}{r}\frac{dA_m}{dr} - \frac{m}{r^2}A_m$$

facta substitutione adipiscimur

$$C_m = \frac{d^2 A_m}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dA_m}{dr} - \frac{m^2}{r^2} A_m \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

## §. 3.

Ut jam applicationem quandam formularum, in paragrapho antecedente allatarum, faciamus, ponamus primo exempli causa

$$y = f(r \operatorname{Cos} x) = (1 + r \operatorname{Cos.} x)^{-\mu},$$

unde, sumtis utrinque logarithmis Neperianis, prodit

$$\log y = -\mu \log (1 + r \operatorname{Cos} x);$$

per cujus æquationis differentiationem respectu ipsius $x$ tandem obtinetur

$$-(1 + r \operatorname{Cos} x)\frac{dy}{dx} + \mu r \operatorname{Sin} x \,.\, y = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Cum autem sit

$$y = A + 2A_1 \operatorname{Cos} x + 2A_2 \operatorname{Cos} 2x + 2A_3 \operatorname{Cos} 3x + \text{etc.},$$

$$-\frac{dy}{dx} = 2A_1 \operatorname{Sin} x + 4A_2 \operatorname{Sin} 2x + 6A_3 \operatorname{Sin} 3x + \text{etc.},$$

per substitutionem harum serierum in æquatione (11) adipiscimur

$$\left.\begin{aligned} 0 = {} & 2A_1 \\ & + 2rA_2 \\ & + \mu rA \\ & - \mu rA_2 \end{aligned}\right\} \text{Sin } x \left\{\begin{aligned} & + 4A_2 \\ & + rA_1 \\ & + 3rA_3 \\ & + \mu rA_2 \\ & - \mu rA_3 \end{aligned}\right\} \text{Sin } 2x + \text{ etc.}$$

unde fore concludimus

$$(2-\mu)rA_2 + 2A_1 + \mu rA = 0 ,$$

$$(3-\mu)rA_3 + 4A_2 + (1+\mu)rA_1 = 0$$

et generatim quidem

$$(m-\mu)rA_m + 2(m-1)A_{m-1} + (m-2+\mu)rA_{m-2} = 0 ,$$

ex qua æquatione una cum (4), sive

$$r\frac{dA_m}{dr} + mA_m = r\frac{dA_{m-2}}{dr} - (m-2)A_{m-2} ,$$

$A_m$ determinari debet. Mutetur ergo $m$ in $m+1$ in duabus hisce æquationibus, quo fiet

$$(m+1-\mu)rA_{m+1} + 2mA_m + (m-1+\mu)rA_{m-1} = 0 ,$$

$$r\frac{dA_{m+1}}{dr} + (m+1)A_{m+1} = r\frac{dA_{m-1}}{dr} - (m-1)A_{m-1} ,$$

ex quibus quatuor æquationibus, per eliminationem ipsorum $A_{m+1}$, $A_{m-1}$ et $A_{m-2}$, obtinebitur

$$r^2(1-r^2)\frac{d^2A_m}{dr^2} + r(1-2.\overline{\mu+1}.r^2)\frac{dA_m}{dr} -$$

$$(\mu.\overline{\mu+1}.r^2 + m^2)A_m = 0 , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

quæ æquatio cum ea plane congruit, quam, pro casu speciali $m = o$, Eulerus *) dedit.

Cum $A_m$ functio sit ipsorum $m$ et $\mu$, designemus hunc per $A(m, \mu)$, ut habeamus

$$A_m = A(m, \mu).$$

Quia autem statuimus

$$f(r\,Cos\,x) = (1 + r\,Cos\,x)^{-\mu},$$

erit adeo

$$f'(r\,Cos\,x) = -\mu(1 + r\,Cos\,x)^{-\mu-1}$$

ideoque etiam

$$B_m = -\mu A(m, \mu + 1),$$

unde per formulam (8) obtinetur, si scilicet in hac $m$ mutetur in $m + 1$,

$$-\mu r A(m, \mu + 1) = r\frac{dA(m+1, \mu)}{dr} + (m+1)A(m+1, \mu)$$

atque sic tandem.

$$A(m, \mu+1) = -\frac{dA(m+1, \mu)}{\mu dr} - \frac{m+1}{\mu r} A(m+1, \mu) \ldots (13)$$

Ex hac itaque formula valorem ipsius $A(m, \mu)$, ubi $\mu$ numerus quicunque integer sit, semper assignare licebit, si modo, pro valore speciali $m = 1$, cognitus sit. Est autem

---

*) Institutionum Calculi Integralis volumen primum, Cap. VI.

$$A(m, 1) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{dx\ \mathrm{Cos}\ mx}{1 + r\,\mathrm{Cos}x},$$

unde, si faciamus

$$r = \frac{-2p}{1+p^2},$$

obtinebitur

$$A(m, 1) = \frac{1+p^2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{dx\,.\,\mathrm{Cos}\ mx}{1 - 2p\ \mathrm{Cos}\,x + p^2} = \frac{1+p^2}{1-p^2}\,.\,p^m,$$

atque cum sit

$$p = \frac{\sqrt{1-r^2} - 1}{r},$$

colligitur tandem

$$A(m, 1) = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left(\frac{\sqrt{1-r^2}-1}{r}\right)^m$$

Si in formula (13) fiat $\mu = 1$, facta substitutione ipsius $A(m, 1)$, prodibit

$$A(m, 2) = \frac{1 + m\sqrt{1-r^2}}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\sqrt{1-r^2}-1}{r}\right)^m$$

quo cognito, $A(m, 3)$ similiter omnino inveniri potest, et generatim quidem $A(m, \mu)$, si modo $\mu$ numerus integer sit. Ex his etiam patet, integrale æquationis (12) semper assignari posse pro valoribus integris ipsorum $m$ et $\mu$.

§. 4.

## §. 4.

Theoremata quædam notatu digna de integralibus definitis, quorum limites sunt $o$ et $\pi$, ex formulis (5), (9) et (10) derivari possunt. Cum scilicet sit

$$A_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(r\,\mathrm{Cos}\,x)\,\mathrm{Cos}\,mx\,.\,dx\ ,$$

$$B_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f'(r\,\mathrm{Cos}\,x)\,\mathrm{Cos}\,mx\,.\,dx\ ,$$

$$C_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f''(r\,\mathrm{Cos}\,x)\,\mathrm{Cos}\,mx\,.\,dx\ ,$$

sequitur ex formulis citatis, integralia definita

$A_m$ a $A_{m-2}$, $B_m$ a $A_{m-1}$, $C_m$ a $A_{m-2}$

pendere, designante tamen $m$ numerum integrum.

Si functio $f$ ita sit comparata, ut habeatur

$$f''(r\,\mathrm{Cos}\,x) = \alpha f(r\,\mathrm{Cos}\,x)\ ,$$

unde per integrationem colligitur

$$f(r\,\mathrm{Cos}\,x) = \alpha\,.\,e^{\sqrt{\alpha}\,.\,r\,\mathrm{Cos}\,x} + b\,.\,e^{-\sqrt{\alpha}\,.\,r\,\mathrm{Cos}\,x}\ ,$$

fiet adeo

$$C_m = \alpha A_m\ ,$$

ideoque ex æquatione (10)

$$r^2\frac{d^2A_m}{dr^2} + r\frac{dA_m}{dr} - (m^2 + \alpha r^2)\,A_m = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Quia $m$ numerus integer esse debet, hujus æquationis

differentio-differentialis integrale assignare non licet; quod ut ostendamus, faciamus

$$A_m = \frac{z}{\sqrt{r}} ,$$

unde ex æquatione (14) fiet

$$t^2 \frac{d^2 z}{dr^2} + \left( \frac{1 - 4m^2}{4} - \alpha r^2 \right) z = 0 .$$

Posito deinde

$$z = e^{\int u \, dr} ,$$

prodit

$$\frac{du}{dr} + u^2 + \frac{1 - 4m^2}{4r^2} - \alpha = 0 ,$$

ubi si fiat

$$r = -\frac{1}{p^n} , \qquad t = \frac{p^{n+1} t}{n} ,$$

obtinebitur

$$\frac{dt}{dp} + t^2 + (n+1)\frac{t}{p} + \frac{n^2 (1 - 4m^2)}{4p^2} - \frac{\alpha n^2}{p^{2n+2}} = 0.$$

Faciamus porro

$$t = v - \frac{n+1}{2p} ,$$

unde fiet

$$\frac{dv}{dp} + v^2 + \frac{1 - 4m^2 n^2}{4p^2} - \frac{\alpha n^2}{p^{2n+2}} = 0.$$

Si itaque sumamus $n = \frac{1}{2m}$ , erit

$$\frac{dv}{dp} + v^2 - \frac{\alpha}{4m^2} \cdot \frac{1}{p^2 + \frac{1}{m}} = 0 ,$$

quæ æquatio cum ea quidem congruit, quæ *Riccatiana* vocari solet, unde etiam concludere licet, hanc æquationem non esse integrabilem, nisi $2m$ numerus impar sit.

## §. 5.

Sit jam

$$y = f(u + v \operatorname{Cos} x) ,$$

ubi $u$ et $v$ functiones sint ipsius $r$. Per differentiationes respectu ipsorum $r$ et $x$ obtinebitur

$$\frac{dy}{dr} = \left( \frac{du}{dr} + \frac{dv}{dr} \operatorname{Cos} x \right) f'(u + v \operatorname{Cos} x) , \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

$$\frac{dy}{dx} = - v \operatorname{Sin} x \, f'(u + v \operatorname{Cos} x) , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

atque, si ex his duabus æquationibus $f'(u + v \operatorname{Cos} x)$ eliminetur

$$\left( \frac{du}{dr} + \frac{dv}{dr} \operatorname{Cos} x \right) \frac{dy}{dx} + v \operatorname{Sin} x \frac{dy}{dr} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Fingatur pro $y$ series

$$y = A + 2A_1 \operatorname{Cos} x + 2A_2 \operatorname{Cos} 2x + 2A_3 \operatorname{Cos} 3x + \text{etc.},$$

unde differentiando colligitur

$$- \frac{dy}{dx} = 2A_1 \operatorname{Sin} x + 4A_2 \operatorname{Sin} 2x + 6A_3 \operatorname{Sin} 3x + \text{etc.},$$

$$\frac{dy}{dr} = \frac{dA}{dr} + 2 \frac{dA_1}{dr} \operatorname{Cos} x + 2 \frac{dA_2}{dr} \operatorname{Cos} 2x + 2 \frac{dA_3}{dr} \operatorname{Cos} 3x + \text{etc.},$$

328509

patebit, per substitutionem harum serierum in æquatione (17), fore generatim

$$\left.\begin{aligned} v\,\frac{dA_m}{dr} + m\,\frac{dv}{dr}\,A_m + 2(m-1)\,A_{m-1}\,\frac{dv}{dr} \\ - v\,\frac{dA_{m-2}}{dr} + (m-2)\,\frac{dv}{dr}\,A_{m-2} \end{aligned}\right\} = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

ex qua æquatione, si per $v^{m-1}\,dr$ multiplicetur, per integrationem obtinebitur

$$A_m = A_{m-2} - \frac{2(m-1)}{v^m}\int v^{m-1}\,(A_{m-1}\,du + A_{m-2}\,dv) \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Cum itaque ex hac æquatione coëfficientem quemcunque $A_m$ per duos proxime antecedentes $A_{m-1}$ et $A_{m-2}$ definire licet, perspicuum est, reliquos omnes per $A$ et $A_1$ exprimi posse.

Statuamus jam

$$f'(u + v\,\mathrm{Cos}\,x) = B + 2B_1\,\mathrm{Cos}\,x + 2B_2\,\mathrm{Cos}\,2x + \text{etc.},$$

unde per formulas (15) et (16) adipiscimur

$$\frac{dv}{dr}\,B_{m-1} + 2\,\frac{du}{dr}\,B_m + \frac{dv}{dr}\,B_{m+1} = 2\,\frac{dA_m}{dr}\,, \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

$$v\,B_{m-1} - v\,B_{m+1} = 2m\,A_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Multiplicetur æquatio (20) per $v$ et æquatio (21) per $\frac{dv}{dr}$; per additionem atque subtractionem formularum sic ortarum obtinebitur

$$v\frac{dv}{dr}\,B_{m-1}+v\frac{du}{dr}\,B_m=v\frac{dA_m}{dr}+m\frac{dv}{dr}\,A_m\,,\quad\ldots\quad(22)$$

$$v\frac{du}{dr}\,B_m+v\frac{dv}{dr}\,B_{m+1}=v\frac{dA_m}{dr}-m\frac{dv}{dr}\,A_m$$

atque, si in hac postrema $m$ mutetur in $m-1$

$$v\frac{du}{dr}\,B_{m-1}+v\frac{dv}{dr}\,B_m=v\frac{dA_{m-1}}{dr}-(m-1)\frac{dv}{dr}\,A_{m-1}\quad\ldots(23)$$

Ex æquationibus (22) et (23) per eliminationem adipiscimur

$$B_m=\frac{v\,du\,dA_m+mA_m\,du\,dv-v\,dv\,dA_{m-1}+(m-1)\,dv^2\,A_{m-1}}{v\,(du^2-dv^2)}\,,\ldots(24)$$

$$B_{m-1}=\frac{v\,du\,dA_{m-1}-(m-1)\,A_{m-1}\,du\,dv-vdv\,dA_m-mA_m\,dv^2}{v\,(du^2-dv^2)}\,,$$

unde, si in æquatione (24) $m$ mutetur in $m-1$, per eliminationem ipsius $B_{m-1}$ formula (18) obtinetur.

Cum sit

$$A_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(u+v\,\mathrm{Cos}\,x)\,\mathrm{Cos}\,mx\,.\,dx\,,$$

$$B_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f'(u+v\,\mathrm{Cos}\,x)\,\mathrm{Cos}\,mx\,.\,dx\,,$$

sequitur ex formulis (19) et (24), integralia definita

$A_m$ a $A_{m-1}$ et $A_{m-2}$, $B_m$ a $A_m$ et $A_{m-1}$

pendere; ita ut, cognitis $A$ et $A_1$ , $A_m$ et $B_m$ ex his derivari possint.

§. 6.

Sit exempli ultimi causa

$x$ anomalia media,

$u$ anomalia excentrica,

$\theta$ anomalia vera,

$e$ excentricitas orbitæ planetæ cujusdam; erit quidem, ut ex formulis, in Astronomia Physica demonstratis, constat

$$x = u - e \operatorname{Sin} u, \quad \ldots \quad (25)$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}u, \quad \ldots \quad (26)$$

$$x = 2 \operatorname{Arctang}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta\right) - \frac{2e\sqrt{1-e^2} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta}{1+e+\sqrt{1-e}\operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2}}, \quad \ldots (27)$$

$$dx = \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}} d\theta}{(1+e\operatorname{Cos}\theta)^2}, \quad \ldots \quad (28)$$

$$d\theta = \frac{\sqrt{1-e^2}\,.\,du}{1-e\operatorname{Cos} u}, \quad \ldots \quad (29)$$

Si itaque propositum sit, $\frac{d\theta}{dx}$ in seriem hujusmodi formæ evolvere

$$\frac{d\theta}{dx} = A + 2A_1 \operatorname{Cos} x + 2A_2 \operatorname{Cos} 2x \ldots + 2A_m \operatorname{Cos} mx + \text{etc.} \ldots (30)$$

erit quidem

$$A_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{dx} \operatorname{Cos} mx \,.\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

vel, si loco ipsorum $x$ et $\theta$ variabilis $u$ ex æquationibus (25) et (29) substituatur,

$$A_m = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{Cos}(mu - me\operatorname{Sin} u)\,du}{(1-e\operatorname{Cos} u)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Aliam etiam formam ipsi $A_m$ tribuere possumus, quæ huic proposito magis convenit, si in formula (31) loco $x$ variabilis $\theta$ introducatur: obtinebitur scilicet

$$A_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{Cos} mx \,.\, d\theta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

ubi loco ipsius $x$ ejus valor ex æquatione (27) substitui debet.

Ut æquationem differentialem ad $A_m$ definiendum jam indagemus, ponamus

$$y = \operatorname{Cos} mx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

et sequentem pro $y$ fingamus seriem

$$y = A_m + 2B\operatorname{Cos}\theta + 2C\operatorname{Cos} 2\theta + 2D\operatorname{Cos} 3\theta + 2E\operatorname{Cos} 4\theta + 2F\operatorname{Cos} 5\theta, \quad (35)$$

ubi scilicet primus terminus ob formulam (35) erit $A_m$. Si æquatio (34) respectu ipsorum $\theta$ et $e$ differentietur, ob

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+e\,\mathrm{Cos}\,\theta)^2},$$

$$\frac{dx}{de} = -\frac{\sqrt{1-e^2}\,\mathrm{Sin}\,\theta\,(2+e\,\mathrm{Cos}\,\theta)}{(1+e\,\mathrm{Cos}\,\theta)^2},$$

fiet adeo

$$\frac{dy}{d\theta} = -\frac{m(1-e^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{Sin}\,mx}{(1+e\,\mathrm{Cos}\,\theta)^2},$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = -\frac{m^2(1-e^2)^3\,\mathrm{Cos}\,mx}{(1+e\,\mathrm{Cos}\,\theta)^4} - \frac{2me(1-e^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{Sin}\,\theta\,\mathrm{Sin}\,mx}{(1+e\,\mathrm{Cos}\,\theta)^3},$$

$$\frac{dy}{de} = \frac{m\sqrt{1-e^2}\,\mathrm{Sin}\,\theta(2+e\,\mathrm{Cos}\,\theta)\,\mathrm{Sin}\,mx}{(1+e\,\mathrm{Cos}\,\theta)^2},$$

atque sic tandem sequentes, per eliminationem quantitatum $\mathrm{Cos}\,mx$ et $\mathrm{Sin}\,mx$, formare licet æquationes

$$(1+e\,\mathrm{Cos}\,\theta)^4\,\frac{d^2y}{d\theta^2} - 2e\,\mathrm{Sin}\,\theta\,(1+e\,\mathrm{Cos}\,\theta)^3\frac{dy}{d\theta} + m^2(1-e^2)^3y = 0, \ldots (36)$$

$$(1-e^2)\,\frac{dy}{de} + (2\,\mathrm{Sin}\,\theta + \frac{e}{2}\,\mathrm{Sin}\,2\theta)\,\frac{dy}{d\theta} \quad \ldots\ldots\ldots (37)$$

Cum autem sit

$$(1+e\,\mathrm{Cos}\,\theta)^4 = 1 + 3e^2 + \frac{3e^4}{8} + (4e + 3e^3)\,\mathrm{Cos}\,\theta$$

$$+ \left(3e^2 + \frac{e^4}{2}\right)\mathrm{Cos}\,2\theta + e^3\,\mathrm{Cos}\,3\theta + \frac{e^4}{8}\,\mathrm{Cos}\,4\theta,$$

$$2e\,\mathrm{Sin}\,\theta(1+e\,\mathrm{Cos}\,\theta)^3=\left(2e+\frac{3e^3}{2}\right)\mathrm{Sin}\,\theta+\left(3e^2+\frac{e^4}{2}\right)\mathrm{Sin}\,2\theta$$

$$+\frac{3e^3}{2}\,\mathrm{Sin}\,3\theta+\frac{e^4}{4}\,\mathrm{Sin}\,4\theta$$

atque ex serie (55), pro $y$ assumta,

$$\frac{dy}{d\theta}=-2B\,\mathrm{Sin}\,\theta-4C\,\mathrm{Sin}\,2\theta-6D\,\mathrm{Sin}\,3\theta-8E\,\mathrm{Sin}\,4\theta-10F\,\mathrm{Sin}\,5\theta,$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}=-2B\,\mathrm{Cos}\,\theta-8C\,\mathrm{Cos}\,2\theta-18D\,\mathrm{Cos}\,3\theta-32E\,\mathrm{Cos}\,4\theta-50F\,\mathrm{Cos}\,5\theta,$$

$$\frac{dy}{de}=\frac{dA_m}{de}+2\frac{dB}{de}\,\mathrm{Cos}\,\theta+2\frac{dC}{de}\,\mathrm{Cos}\,2\theta+2\frac{dD}{de}\,\mathrm{Cos}\,3\theta+$$

$$2\frac{dE}{de}\,\mathrm{Cos}\,4\theta+2\frac{dF}{de}\,\mathrm{Cos}\,5\theta\,,$$

ob formulas cognitas

$$\mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,b=\tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}\,(a-b)+\tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}\,(a+b)\,,$$

$$\mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Sin}\,b=\tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}\,(a-b)-\tfrac{1}{2}\mathrm{Cos}\,(a+b)\,,$$

ex æquationibus (56) et (57) adipiscimur

$$2e^4E+9e^3D+2(6e^2+e^4)C+(4e+3e^3)B-2m^2(1-e^2)^3A_m=0,\quad(38)$$

$$\left.\begin{aligned}15e^4F+80e^3E+9(16e^2+3e^4)D+16(6e+5e^3)C\\+[16+48e^2+6e^4-16m^2(1-e)^3]\end{aligned}\right\}=0,\ldots(39)$$

$$eC+2B-(1-e^2)\frac{dA_m}{de}=0\,,\quad\ldots\ldots\ldots\quad(40)$$

$$3eD + 8C + eB - 4(1-e^2)\frac{dB}{de} = 0, \quad \ldots \quad (41)$$

$$eE + 3D - B - (1-e^2)\frac{dC}{de} = 0, \quad \ldots \quad (42)$$

$$5eF + 16E - 8C - eB - 4(1-e^2)\frac{dD}{de} = 0 \quad \ldots \quad (43)$$

Ex æquationibus (39) et (43), per eliminationem ipsius $F$, colligitur

$$\left.\begin{aligned} &32e^3E + 9(16e^2 + 3e^4)D + 8(12e + 13e^3)C \\ &+ [16 + 48e^2 + 9e^4 - 16m^2(1-e^2)^3]B + 12e^3(1-e^2)\frac{dD}{de} \end{aligned}\right\} = 0,$$

tum vero ex hac et (38)

$$\left.\begin{aligned} &27e^5D - 24(4e^2 - 3e^4)C - [48e - 9e^5 + 16m^2(1-e^2)^3] \\ &+ 32m^2(1-e^2)^3A_m + 12e^4(1-e^2)\frac{dD}{de} \end{aligned}\right\} = 0, \quad (44)$$

Similiter omnino ex æquationibus (38) et (42) obtinetur

$$\left.\begin{aligned} &3e^3D + 2(6e^2 + e^4)C + (4e + 5e^3)B \\ &- 2m^2(1-e^2)^3A_m + 2e^3(1-e^2)\frac{dC}{de} \end{aligned}\right\} = 0 \quad \ldots \quad (45)$$

Si jam ex æquationibus (41) et (44) atque (41) et 45) $D$ eliminetur, prodibit

$$\left.\begin{aligned} &2(2e^2+e^4)C+[3e+m^2e(1-e^2)^3]B-2m^2(1-e^2)^3A_m \\ &+2e^3(1-e^2)\frac{dC}{de}+e^2(1-e^2)^2\frac{dB}{de}-e^3(1-e^2)^2\frac{d^2B}{de^2} \end{aligned}\right\}=,.. (46)$$

$$\left.\begin{aligned} &(2e^2+e^4)C+2(e+e^3)B-m^2(1-e^2)^3A_m \\ &+e^3(1-e^2)\frac{dC}{de}+2e^2(1-e^2)\frac{dB}{de} \end{aligned}\right\}=0\ ,\ .\ .\ .\ (47)$$

tum vero ex (46) et (47), atque (40) et (47) per eliminationem ipsius $C$ adipiscimur

$$[1+4e^2-m^2(1-e)^3]B+e(1-e^2)(3+e^2)\frac{dB}{de}+e^2(1-e^2)^2\frac{d^2B}{de^2}=0\ (48)$$

$$2e^3B+m^2(1-e^2)^3A_m-e(1-e^2)\frac{dA_m}{de}-e^2(1-e^2)^2\frac{d^2A_m}{de^2}=0,\ (49)$$

e quibus duabus æquationibus $A_m$ definiatur. Si itaque $B$ et $A_m$ in series ascendentes, secundum dignitates ipsius $e$ progredientes, evolvere propositum sit, et $m$ numerus sit positivus, ex æquationibus (48) et (49) sequitur, has series sequentis formæ necessario esse debere

$$B=\sum_{n=0}^{n=\infty} b_n e^{m+2n-1},$$

$$A_m=\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n e^{m+2n},\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (50)$$

ubi quidem $b_n$ coëfficiens termini generalis $e^{m+2n-1}$ in e-

volutione ipsius $B$, atque $a_n$ coëfficiens termini generalis $r^{m+2n}$ in evolutione ipsius $A_m$ sit. Substituantur jam hæ series pro $B$ et $A_m$ in æquationibus (48) et (49); obtinebitur quidem, singulis terminis nihilo æqualibus positis

$$b_1 = -\frac{m^2+4m+2}{4(m+1)}\,b_0 \quad ,$$

$$b_2 = -\frac{m^2-4m+2}{8(m+2)}\,b_1 + \frac{2m^2+4m-3}{8(m+2)}\,b_0 \quad ,$$

$$b_3 = -\frac{m^2-12m-14}{12(m+3)}\,b_2 + \frac{2m^2+1}{12(m+3)}\,b_1 - \frac{m^2}{12(m+3)}\,b_0 \quad ,$$

$$b_n = -\frac{m^2-4(2n-3)m-8n^2+24n-14}{4n(m+n)}\,b_{n-1}$$

$$+\frac{2m^2-4(n-3)m-(2n-5)(2n-7)}{4n(m+n)}\,b_{n-2} - \frac{m^2}{4n(m+n)}\,b_{n-3}$$

$$a_1 = \frac{b_0}{2(m+1)} - \frac{m}{4}\,a_0 \quad ,$$

$$a_2 = \frac{b_1}{4(m+2)} - \frac{m^2-7m-6}{8(m+2)}\,a_1 + \frac{2m^2+m}{8(m+2)}\,a_0 \quad ,$$

$$a_3 = \frac{b^2}{6(m+3)} - \frac{m^2-15m-28}{12(m+3)}\,a_2 +$$

$$\frac{2m^2-3m-2}{12(m+3)}\,a_1 - \frac{m^2}{12(m+3)}\,a_0 \quad ,$$

$$a_{.n} = \frac{b_{.n-1}}{2n(m+n)} - \frac{m^2-(8n-9)m-2(n-1)(4n-5)}{4n(m+n)}\, a_{n-1}$$

$$+ \frac{2m^2-(4n-9)m-2(n-2)(2n-5)}{4n(m+n)}\, a_{n-2} - \frac{m^2}{4n(m+n)}\, a_{n-3}\,.$$

Ex his itaque perspicuum est, coëfficientem quemlibet $a_n$ semper formari posse, si solummodo primi duo coëfficientes $b_0$ et $a_0$ cogniti sint. Est autem

$$B = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{Cos}\, mx\, \mathrm{Cos}\,\theta\, .\, d\theta\,,$$

ubi $x$ valorem obtinet $e$ formula (27). Si loco ipsius $\theta$ variabilis $u$ substituatur, unde ex æquatione (26) fiet

$$\mathrm{Cos}\,\theta = \frac{\mathrm{Cos}\, u - e}{1 - e\ \mathrm{Cos}\, u}$$

ob formulas (25) et (29) prodibit

$$B = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{(\mathrm{Cos}\, u - e)\ \mathrm{Cos}\,(mu - me\ \mathrm{Sin}\, u)\, du}{(1 - e\ \mathrm{Cos}\, u)^2}\,,$$

atque cum sit e formula (32)

$$A_m = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{Cos}\,(mu - me\ \mathrm{Sin}\, u)\, du}{(1 - e\ \mathrm{Cos}\, u)^2}$$

ex his $a_0$ et $b_0$ facile inveniri possunt. Nos quidem invenimus

$$b_0 = \frac{m^m}{2^m\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,m-1}\,,$$

$$a_0 = \frac{1}{2^m}\left\{1 + m + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{2.3} \ldots + \frac{m^m}{1.2.3 \ldots m}\right\},$$

ex quibus duobus coëfficientibus cum alius quicunque facile determinatur, valor seriei (50) perfecte cognitus fiet; atque sic, si valor ipsius $A_m$ in serie (50) substituatur, et $e^{13}$ et, quæ sequuntur, dignitates ipsius $e$ negligantur, per integrationem obtinebitur

$$\theta - x = \left(2e - \frac{1}{2^2}e^3 + \frac{5}{2^5.3}e^5 + \frac{167}{2^9.3^2}e^7 + \frac{6217}{2^{13}.3^2.5}e^9 + \frac{565879}{2^{16}.3^3.5^2}e^{11}\right)\operatorname{Sin} x$$

$$+\left(\frac{5}{2^2}e^2 - \frac{11}{2^3.3}e^4 + \frac{17}{2^6.3}e^6 + \frac{43}{2^7.3^2.5}e^8 + \frac{677}{2^9.3^3.5}e^{10} + \frac{7237}{2^{10}.3^3.5.7}e^{12}\right)\operatorname{Sin} 2x$$

$$+\left(\frac{13}{2^2.3}e^3 - \frac{43}{2^6}e^5 + \frac{95}{2^9}e^7 - \frac{973}{2^{12}.3.5}e^9 + \frac{19503}{2^{16}.5.7}e^{11}\right)\operatorname{Sin} 3x$$

$$+\left(\frac{103}{2^5.3}e^4 - \frac{451}{2^5.3.5}e^6 + \frac{4123}{2^8.3.5}e^8 - \frac{1619}{2^7.3^3.7}e^{10} + \frac{111929}{2^{13}.3^3.5.7}e^{12}\right)\operatorname{Sin} 4$$

$$+\left(\frac{1097}{2^6.3.5}e^5 - \frac{5957}{2^9.3^2}e^7 + \frac{164921}{2^{12}.3^2.7}e^9 - \frac{4305913}{2^{17}.3^3.7}e^{11}\right)\operatorname{Sin} 5x$$

$$+\left(\frac{1223}{2^6.3.5}e^6 - \frac{7913}{2^7.5.7}e^8 + \frac{7751}{2^{10}.7}e^{10} - \frac{82021}{2^{11}.3.5.7}e^{12}\right)\operatorname{Sin} 6x$$

$$+\left(\frac{47273}{2^9.3^2.7}e^7-\frac{1773271}{2^{14}.3^2.5}e^9+\frac{93521303}{2^{17}.3^4.5}e^{11}\right)\operatorname{Sin}7x$$

$$+\left(\frac{556403}{2^{10}.3^2.5.7}e^8-\frac{4745483}{2^9.3^4.5.7}e^{10}+\frac{32431949}{2^{12}.3^4.5.7}e^{12}\right)\operatorname{Sin}8x$$

$$+\left(\frac{10661993}{2^{14}.3^2.5.7}e^9-\frac{101836961}{2^{17}.5^2.7}e^{11}\right)\operatorname{Sin}9x$$

$$+\left(\frac{7281587}{2^{10}.3^4.5.7}e^{10}-\frac{76972457}{2^{11}.3^4.7.11}e^{12}\right)\operatorname{Sin}10x$$

$$+\left(\frac{62929017101}{2^{17}.3^4.5^2.7.11}e^{11}\right)\operatorname{Sin}11x$$

$$+\left(\frac{7218065}{2^{13}.3.7.11}e^{12}\right)\operatorname{Sin}12x.$$

Ex his videtur, formulam, quam pro æquatione centri dedit *Oriani*, non perfecte esse correctam. Methodus, qua nos ad coëfficientes ipsius $e$ determinandos usi sumus, in hoc maxime se commendat, quod quemlibet per antecedentes determinare licet, unde error calculi non tam facile committi potest.

## §. 7.

Cum sit

$$A_m=\frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{Cos}(mu-me\operatorname{Sin}u)\,du}{1-e\operatorname{Cos}u},$$

$$B=\frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{Cos}(mu-me\operatorname{Sin}u)(\operatorname{Cos}u-e)\,du}{(1-e\operatorname{Cos}u)^2},$$

per combinationem obtinebitur

$$A_m + eB = \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{\pi}\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}\,(mu - me\,\mathrm{Sin}\,u)\,du}{(1-e\,\mathrm{Cos}\,u)^2} \quad ,$$

Si in hac formula valor ipsius $B$ ex æquatione (49) substituatur, prodibit

$$\frac{2e^2\,(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{\pi}\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}\,(mu - me\,\mathrm{Sin}\,u)\,du}{(1-e\,\mathrm{Cos}\,u)^2} = 0$$

$$[2e^2 - m^2(1-e^2)^3]\,A_m + e(1-e^2)\,\frac{dA_m}{de} + e^2(1-e^2)^2\,\frac{d^2A_m}{de^2} \,.$$

Similiter animo, cum sit

$$C = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{Cos}\,mx\;\mathrm{Cos}\,2\theta\,.\,d\theta \quad ,$$

si loco ipsius $\theta$ variabilis $u$ introducatur, per combinationem obtinebitur

$$(2+e^2)\,A_m + 4eB + e^2C = \frac{2(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}{\pi}\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}\,(mu - me\,\mathrm{Sin}\,u)\,du}{(1-e\,\mathrm{Cos}\,u)^3} \,,$$

unde ob formulas (40) et (49) perspicuum est, integrale definitum

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}\,(mu - me\,\mathrm{Sin}\,u)\,du}{(1-e\,\mathrm{Cos}\,u)^3}$$

et generaliter quidem

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{Cos}\,(mu - me\,\mathrm{Sin}\,u)\,du}{(1-e\,\mathrm{Cos}\,u)^n}$$

per integrale definitum $A_m$ exprimi posse, si modo $n$ numerus integer sit.

# DISQUISITIONUM
## IN
# THEORIAM REFRACTIONUM ASTRONOMICARUM
### PARS SECUNDA

AUCTORE
JÖNS SVANBERG.

## §. 21.

Ex eisdem omnino, atque in priore harum disquisitionum parte, egressuri principiis, ponamus etiamnum *AHL* superficiem exhibere telluris, cujus centrum sit *C*, et *CAZ* linea verticalis in puncto *A*; *AMV* autem trajectoriam sistere, quam radius quilibet luminis in suo describet per atmosphæram transitu, ubi *KE* prima sit illa, juxta quam ipsam ingrediatur atmosphæram, directio, atque *AT* ultima, juxta quam observatoris in puncto *A* feriat oculum. Continget adeo recta *AT* curvam *AMV* in *A*; tum vero, si hæc ipsam *KE* seset in *G*, per indefinitum autem quodlibet trajectoriæ punctum *M* ducatur tangens *MQ*, rectis *AT* et *CZ* occurrens in *P* et *D*, atque jungantur *C* et *P*, nec non demittantur a puncto *C* ipsis

*MD* et *AT* ad perpendiculum *CQ* et *CF*; fiet scilicet angulus *TGK*, hoc est *ZEK*—*ZAT*, ipsa illa refractio, quam universa, ad *A* usque, inducet atmosphæra,

*TPM* autem, hoc est *ZDM* — *ZAT*, sive

*ACM* + *CMD* — *ZAT* = indefinita illa refractionis pars, quam atmosphæra a puncto indefinito *M* ad *A* usque inducet

Ideoque si brevitatis causa ponamus

Apparentem a vertice distantiam *ZAT* = $\theta$,
Angulum indefinitum *ACM* = $u$,
Refractionem indefinitam *TPM* = $\varrho$,
Definitam autem, quæ ab universa oritur atmosphæra, refractionem } = $r$,
Radium terrestrem *CA* = $a$,
Radium vectorem *CM* = $(1 + x) \cdot a$,
atque perpendiculum *CQ* = $p \cdot a$,

fit adeo

$$\varrho = u + CMD - \theta,$$
$$CMD = \varrho - u + \theta,$$

$$\text{Sin}\,(\varrho - u + \theta) = \frac{CQ}{CM} = \frac{p}{1 + x},$$

$$\text{Cos}\,(\varrho - u + \theta) = \frac{\sqrt{(1 + x)^2 - p^2}}{1 + x}$$

ex quo per differentiationem

$$(d\varrho - du) \,.\, \mathrm{Cosin}(\varrho - u + \theta) = \frac{dp}{1 + x} - \frac{p\,dx}{(1 + x)^2}$$

et inde

$$d\varrho - du = \frac{dp}{\sqrt{(1+x)^2 - p^2}} - \frac{p\,dx}{(1+x)\sqrt{(1+x)^2 - p^2}}$$

Sed et ex proprietate tangentium

$$\sqrt{(1 + x)^2 - p^2} = \frac{p\,dx}{(1 + x)\,du} \,,$$

et inde $$du = \frac{p\,dx}{(1 + x)\sqrt{(1 + x)^2 - p^2}} \,, \quad \ldots \quad (1)$$

igitur fiet tandem

$$d\varrho = \frac{dp}{\sqrt{(1 + x)^2 - p^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

$$= \frac{(1 + x)\,dp}{p\,dx} \,.\, du \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

## §. 22.

Superest jam, ut et demonstrata huc usque ad ipsum traducamus, de quo heic agere constituimus, refractionum problema; quem igitur in finem ponamus $\varphi$ eam esse funtionem, quæ ad datum quodlibet temporis momentum densitatem exhibeat aëris in puncto $M$, sumenda videlicet pro unitate sui generis ea, quæ pro latitudine $45^\circ$ temperaturæ

conveniat glaciei liqvantis, et barometro $= 0^m.76$ ; erit profecto hæc functio tantum ipsius $x$, siquidem atmosphæra non præter omne solitum ab æquilibrii quodam deturbata fuerit statu, neque angulorum $u$ nisi perexiguorum admodum hic rationem habeamus. Tum vero ponamus $1 + \varepsilon$ ad 1 eam exhibere rationem, quam sinus anguli incidentiæ ad sinum habet anguli refracti, pro radio scilicet lucis qui ex vacuo in aërem transit, cujus ex antecedentibus densitatem unitati æqualem statuamus. Patebit utique ex repetitis Biotii et Aragonis observationibus, pro alia qualibet aëris densitate $\varphi$, fore hanc rationem $1 + \varepsilon\varphi$ ad 1, atque sic tandem proditurum

$$\text{Sin.}\,CMQ : \text{Siu}\,(CMQ - d\varrho) = 1 + \varepsilon\varphi : 1 + \varepsilon\varphi + \varepsilon d\varphi ,$$

ex quo igitur $\text{Sin.}\,CMQ : \text{Sin.}\,CMQ - Sin\,(CMQ - d\varrho)$

hoc est $\text{Sin.}\,CMQ : 2\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}d\varrho.\,\text{Cosin}\,(CMQ - \frac{1}{2}d\varrho)$,

vel denique, ob evanescentem angulum $d\varrho$,

$$\text{Sin.}\,CMQ : d\varrho.\,\text{Cosin}\,CMQ = 1 + \varepsilon\varphi : -\varepsilon d\varphi ,$$

hoc est $p : d\varrho\sqrt{[(1+x)^2 - p^2]} = 1 + \varepsilon\varphi : -\varepsilon d\varphi$

vel tandem ex æquatione (2)

$$p : dp = 1 + \varepsilon\varphi : -\varepsilon d\varphi ,$$

et inde $$\frac{dp}{p} = -\frac{\varepsilon d\varphi}{1 + \varepsilon\varphi}$$

cujus adeo integrale completum dabit

$$p = \frac{C}{1 + \varepsilon\varphi} \ ,$$

ubi constans arbitraria $C$ ex eo est determinanda, quod in puncto $A$, abeat $p$ in $\sin\theta$, et $\varphi$ in $\varphi(o)$, exhibente videlicet $\varphi(o)$ densitatem aëris in puncto $A$, igitur

$$C = [1 + \varepsilon . \varphi(o)] . \operatorname{Sin}\theta$$

et inde tandem

$$p = \frac{[1 + \varepsilon . \varphi(o)] . \operatorname{Sin}\theta}{1 + \varepsilon\varphi} \quad . \ . \ . \ . \ (4)$$

$$\sqrt{(1+x)^2 - p^2} = \frac{\sqrt{(1+x)^2 . (1+\varepsilon\varphi)^2 - (1+\varepsilon\varphi(o))^2 \operatorname{Sin}\theta^2}}{1 + \varepsilon\varphi} \ ,$$

$$dp = \frac{-\varepsilon(1 + \varepsilon.\varphi(o)) \operatorname{Sin}\theta}{(1+\varepsilon\varphi)^2} . d\varphi \ ;$$

quibus igitur in æquationibus (1) et (2) rite substitutis, fiet scilicet

$$du = \frac{(1 + \varepsilon.\varphi(o) \operatorname{Sin}\theta . dx}{(1+x)\sqrt{(1+x)^2 . (1+\varepsilon\varphi)^2 - (1+\varepsilon.\varphi(o))^2 \operatorname{Sin}\theta^2}} \ \ldots \ (5)$$

$$= -\varepsilon\left(\frac{d\varphi}{dx}\right).\left(\frac{1+x}{1+\varepsilon\varphi}\right) du \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (5.1)$$

$$d\varrho = \frac{-\varepsilon(1 + \varepsilon.\varphi(o)) \operatorname{Sin}\theta . d\varphi}{(1+\varepsilon\varphi)\sqrt{(1+x)^2 . (1+\varepsilon\varphi)^2 - (1+\varepsilon.\varphi(o))^2 \operatorname{Sin}\theta^2}} \ \ldots \ (6)$$

ubi fundamenti loco assumsimus

$a$ = radio curvaturæ meridiani terrestris pro latitudine 45°

= 6366131 Metris gallicis,

Logar. $a$ = 6.8038756,

$\tau . a$ = Subtangenti Barometricæ pro hac latitudine, et ad temperaturam glaciei liquantis

= $7963^m . 223$ = $0^a . 001250873$,

Log. $\tau a$ = 3.9010889 = 7.0972133,

$\varepsilon$ = $60''.53753$ = 0.0002934992,

Log. $\varepsilon$ = 1.7820247 = 6′4675695,

## §. 25.

His autem ita præmissis, primum utique omnium generaliter admodum animadvertisse juvabit, quæcunque locum habere ponatur hypothesis pro densitatibus aëris ad crescentes in atmosphæra altitudines decrescentibus, fore scilicet semper, ut refractiones, quibus terrestria afficiuntur objecta, ab illis, quibus cœlestia sunt obnoxia, in eo tantum differant, quod pro cœlestibus integrale æquationis (6) ad universam extendendum sit atmosphæræ altitudinem, cum pro terrestribus non nisi ad objecti, de quo agitur, altitudinem sit extendendum; quæ igitur cum præ universa atmosphæræ altitudine vel semper, vel saltem

plerumque sit minima, patebit adeo pro his quidem valorem ipsius $\varphi$ in seriem commodissime explicari, quae secundum crescentes ipsius $x$ potestates progrediatur; atque cum $\varphi$ functio sit ipsius $x$, indefinite quidem exhibenda per $\varphi(x)$, $\left(\frac{d^n\varphi}{dx^n}\right)$ autem ex notatione LAGRANGII per $\varphi^{(n)}(x)$, fiet ex notissimo MACLAURINI Theoremate

$$\varphi(x) = \varphi(o) + x.\varphi'(o) + \frac{x^2}{2}.\varphi''(o) + \text{&c.};$$

et inde $\varphi'(x) = \varphi'(o) + x.\varphi''(o) + \text{&c.}$,

quibus denique in æquatione (5. 1) substitutis, in qua, cum $x$ et $\varepsilon.\varphi(o)$ tantum non evanescant, fractionem adeo $\frac{1+x}{1+\varepsilon\varphi}$ unitati æqualem statuere licet, prodibit tandem

$$d\varrho = -\varepsilon.\varphi'(x).du = -\varepsilon.\varphi'(o)\left(1 + x.\frac{\varphi''(o)}{\varphi'(o)}\right).du \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

atque sic quidem, pro evanescentibus omnino $x$,

$$\varrho = -\varepsilon.\varphi'(o)\left(1 + \tfrac{1}{2}x.\frac{\varphi''(o)}{\varphi'(o)}\right).u \quad . \quad . \quad . \quad (7.1)$$

Cæterum probe hic est observandum, angulum $\varrho =$ *MPT*, quamvis revera ille sit angulus, quo radius, qui ad *A* perveniat, a prima deturbatus fuerit, qua punctum *M* deseruit, directione, nequaquam tamen ipsum esse il-

lum, quem refractionem terrestrem pro puncto $M$ dicere moris est; quippe cum angulus $MAP$ hanc eandem sistit; ideoque, si curvam $AMV$ circulum esse ponamus, (quæ quidem hypothesis haud sane multum a vero discrepabit, quamdiu de puncto agatur $M$, quod non nimio plus supra ipsum $A$ sit editum), fiet

$$MAP = AMP, \quad \text{et inde} \quad MAP = \tfrac{1}{2}\varrho$$

atque sic tandem

$$MAP = -\tfrac{1}{2}\varepsilon.\varphi'(0)\left(1 + \tfrac{1}{2}x.\frac{\varphi''(0)}{\varphi'(0)}\right).n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

## §. 24.

Præter eas, de quibus in priore harum disquisitionum parte egimus, hypotheses mere geometricas, quas pro functione comminiscamur $\varphi$, ex qua cuilibet in atmosphæra Telluris altitudini $= x.a$ convenientem liceat definire aëris densitatem, una etiamnum insigniter se cum simplicitate commendat, tum exacta fere adamussim ratione, qua refractionibus satisfacit tam terrestribus, quam cœlestibus; scilicet

$$\varphi(x) = \varphi(0).\frac{h - x}{h + x}$$

$$= \frac{2\varphi(0).h}{h + x} - \varphi(0);$$

Ex hac atmosphæræ prodit altitudo $= h$,

$$\text{et} \quad \varphi(x) \,.\, dx = \frac{2\,\varphi(o) \,.\, h\, dx}{h + x} - \varphi(o) \,.\, dx\,,$$

ideoque integrali ita sumto, ut evanescat posito $x = o$,

$$\int \varphi(x) \,.\, dx = \varphi(o) \left( 2\,h \text{ Log Hyp. } \frac{h + x}{h} - x \right)$$

atque proinde hoc idem intra limites $o$ et $h$ sumtum, sive

$$\int_o^h \varphi(x)\, dx = \varphi(o) \,.\, h \;(2 \text{ Hyp. Log. } 2 - 1)$$
$$= 0.3862944\, h \,.\, \varphi(o)$$

Sed et hoc ipsum integrale universæ sistit atmosphæræ pondus, altitudine scilicet definitum columnæ aëris, cujus densitatem pro unitate assumsimus; ideoque æquivalebit omnino hoc subtangenti barometriæ $\tau$, quæ temperaturæ conveniet glacici liquantis; unde patebit fore

$$0{,}3862944\, h \,.\, \varphi(o) = \tau\,,$$

atque sic tandem

$$h = \frac{2.5886994\,\tau}{\varphi(o)} = \frac{0^a.003238134}{\varphi(o)} = \frac{H}{\varphi(o)}$$

ipsaque atmosphæræ altitudo $h \,.\, a = \dfrac{20614^m.39}{\varphi(o)}$

## §. 25.

Jam vero, cum ex hypothesi, de qua agitur, prodeat

$$\varphi'(x) = -\frac{2\varphi(o).h}{(h+x)^2}, \quad \text{et} \quad \varphi''(x) = +\frac{4\varphi(o).h}{(h+x)^3}$$

ideoque $$\varphi'(o) = -\frac{2\varphi(o)}{h} = -\frac{2\varphi(o)^2}{H},$$

et $$\varphi''(o) = +\frac{4\varphi(o)}{h^2} = +\frac{4\varphi(o)^3}{H^2},$$

fiet adeo ex formula (8)

$$MAP = \frac{\varepsilon}{H}.\varphi(o)^2.\left(1 - \frac{x}{H}.\varphi(o)\right).u \;;$$

ideoque, si brevitatis causa statuamus

$$ACM : MAP = n : 1, \qquad \text{erit profecto}$$

$$n = \frac{H}{\varepsilon.\varphi(o)^2}\left(1 + \frac{x}{H}.\varphi(o)\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

ubi scilicet si altitudinem barometri ponamus $= B$, et temperaturam ex indicio thermometri centesimalis $= +t°$, erit

$$\varphi(o) = \frac{B}{o^m.76}.\frac{800}{800+3t}, \qquad \text{et inde}$$

$$\frac{H}{\varepsilon.\varphi(o)^2} = \frac{H}{\varepsilon}.\left(\frac{0^m.95(800+3t)}{1000\,B}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

ex quibus pro altitudine barometri $= o^m.76$, et temperatura $= +0°$, obtinebitur $\frac{H}{\varepsilon.\varphi(o)} = 11.03305$; pro eadem autem barometri altitudine, at temperatura $= +10°$, fiet $\frac{H}{\varepsilon.\varphi(o)} = 11.87604$

Sed et dato ipsius $\frac{H}{\varepsilon . \varphi(o)^2}$ valore $N$, determinabitur huic conveniens atmosphæræ temperatura ex hac formula

$$800 + 3t = \frac{1000\,B}{0^m.95} \sqrt{\frac{N\varepsilon}{H}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

secundum quam, si ex observationibus secundo fundamentorum systematis metrici volumine p. 776 allatis (pro quibus scilicet, a grandiore supra libellam maris elevatione, mediam barometri altitudinem haud ultra $o^m.745$ assumendam esse judicavimus), numerum $N$ cum Clariss. Delambre ponamus $= 12.6968$; fiet adeo

| | | |
|---|---|---|
| Log. $N$ | . . . . . | 1.1036943 |
| Log. $\varepsilon$ | . . . . . | 6.4674995 |
| Comp. Log $H$ | . . . | 2.4897051 |
| | | 0.0609989 |
| | | 0.0304995 |
| Log. 1000 $B$ | . . . | 2.8721563 |
| Comp. L. 0,95 | . . . | 0.0222764 |
| | | 2.9249322... 841.2638 $=$ 800 $+$ 3$t$ |

ideoque conveniens eidem temperatura $= +$ 13°.75 ex thermometro centesimali, quæ profecto vel nihil prorsus, vel saltem parum admodum ab ea differet, ad quam hic numerus determinatus fuerit.

## §. 26.

Quod si jam ponatur $x = h.z$, quo adeo fiet

$$\varphi = \varphi(o).\frac{1-z}{1+z}\ , \qquad d\varphi = -\frac{2\varphi(o)}{(1+z)^2}.dz\ ,$$

$$1+\varepsilon\varphi = \frac{(1+\varepsilon.\varphi(o)) + (1-\varepsilon.\varphi(o))z}{1+z}$$

$$= \frac{1+\varepsilon.\varphi(o)}{1+z}\left(1+\frac{1-\varepsilon.\varphi(o)}{1+\varepsilon.\varphi(o)}.z\right),$$

$$\frac{d\varphi}{1+\varepsilon\varphi} = \frac{-2\varphi(o).dz}{(1+z)\,(1+\varepsilon\varphi(o))\left(\frac{1-\varepsilon.\varphi(o)}{1+\varepsilon.\varphi(o)}.z\right)}\ ,$$

$$\frac{-\varepsilon(1+\varepsilon\varphi(o))\,\mathrm{Sin}\,\theta.d\varphi}{1+\varepsilon\varphi} = \frac{2\varepsilon.\varphi(o).\mathrm{Sin}\,\theta.dz}{(1+z)\left(1+\frac{1-\varepsilon.\varphi(o)}{1+\varepsilon.\varphi(o)}.z\right)}\ ,$$

$$(1+x)^2.(1+\varepsilon\varphi)^2 =$$

$$\left(\frac{1+\varepsilon.\varphi(o)}{1+z}\right)^2.\left\{\begin{array}{l}(1+z)^2 + 2\left(h-\frac{2\varepsilon.\varphi(o)}{1+\varepsilon.\varphi(o)}\right).z \\ + \left\{h^2+4\left(\frac{1-\varepsilon.\varphi(o)}{1+\varepsilon.\varphi(o)}\right)h - \frac{4\varepsilon.\varphi(o)}{(1+\varepsilon.\varphi(o))^2}\right\}z^2 \\ + 2\left\{\left(\frac{1-\varepsilon.\varphi(o)}{1+\varepsilon.\varphi(o)}\right)h^2 + \left(\frac{1-\varepsilon.\varphi(o)}{1+\varepsilon.\varphi(o)}\right)^2 h\right\}z^3 \\ + \left(\frac{1-\varepsilon.\varphi(o)}{1+\varepsilon.\varphi(o)}\right)^2 h^2 z^4\end{array}\right\},$$

prodibit ex his in æquatione (6) substitutis

$$d\varrho = \frac{\frac{2\varepsilon \cdot \varphi(o)\ \mathrm{Sin}\,\theta}{1+\varepsilon\cdot\varphi(o)}\cdot dz}{\left(1+\frac{1-\varepsilon\varphi(o)}{1+\varepsilon\varphi(o)}\cdot z\right)\cdot\sqrt{\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Cosin}\,\theta^2(1+z)^2+2\left\{h-\frac{2\varepsilon\cdot\varphi(o)}{1+\varepsilon\cdot\varphi(o)}\right\}\cdot z\\ +\left\{4h\left(\frac{1-\varepsilon\cdot\varphi(o)}{1+\varepsilon\cdot\varphi(o)}\right)-\frac{4\varepsilon\cdot\varphi(o)}{(1+\varepsilon\varphi(o)^2}+h^2\right\}z^2\\ +2\left\{\left(\frac{1-\varepsilon\varphi(o)}{1+\varepsilon\varphi(o)}\right)^2 h+\left(\frac{1-\varepsilon\varphi(o)}{1+\varepsilon\varphi(o)}\right)\cdot h^2\right\}\cdot z^3\\ +\left(\frac{1-\varepsilon\cdot\varphi(o)}{1+\varepsilon\,\varphi(o)}\right)^2\cdot h^2\,z^4\end{array}\right\}}}\quad 12$$

quod denique si in numeros convertatur, fiet pro altudine Barometri $= 0^m.76$, et temperatura atmosphæræ $= 0°$,

$$d\varrho = \frac{121''.03914\ \mathrm{Sin}\,\theta\,.\,dz}{(1+.09994130\,z)\,.\,\sqrt{\begin{array}{l}\mathrm{Cosin}\,\theta^2(1+z)^2+0.005302436\,z\\ +0.01178214z^2+0.006489929\,z^3\\ +0.000010473z^4\end{array}}}\quad..(13)$$

## §. 27.

Hinc igitur pro refractione horizontali obtinebimus

$$d\varrho = \frac{121''.03914\ dz}{(1+0.9994130\,z)\,.\,\sqrt{\begin{array}{l}0.005302436\,z+0.01178214\,z^2\\ +0.006489629\,z^3+0.000010473\,z^4\end{array}}}$$

$$\frac{1662''224\,dz}{(1+0.9994130z)\sqrt{z\left(\begin{matrix}1+2.222024z+1.225850z^2\\+0.001975170z^3\end{matrix}\right)}}$$

$$=\frac{1662''.224\,dz}{(1+0.9994130z).\sqrt{z\left(\begin{matrix}(1+1.111012z)^2-0.009498z^2\\+0.00197517z^3\end{matrix}\right)}},$$

vel denique si ponatur $z=t^2$,

$$=\frac{3324''.448\,dt}{(1+0.99413t^2).\sqrt{\left(\begin{matrix}(1+1.111012t^2)^2\\-0.009498t^4+0.001975t^6\end{matrix}\right)}}\quad..(14)$$

hoc est, si brevitatis causa statuamus

$$M=3324''.448,\qquad m=0.9994130,$$

$$n=1.111012,\quad \alpha=0.009498,\quad \text{et}\quad \beta=0.001975$$

$$d\varrho=\frac{M\,dt}{(1+mt^2(\sqrt{(1+nt^2)^2-\alpha t^4+\beta t^6}}$$

quod adeo cum in seriem evolvatur secundum crescentes ipsius $\alpha t^4-\beta t^6$ potestates progredientem, fiet scilicet

$$d\varrho=\frac{M\,dt}{(1+mt^2)(1+nt^2)}+\frac{\alpha M t^4-\beta M t^6}{2(1+mt^2)(1+nt^2)^3}\,.\,dt$$

Jam ut hujus obtineamus integrale, ponamus

$$\frac{M}{(1+mt^2)(1+nt^2)}=\frac{F}{1+mt^2}+\frac{G}{1+nt^2},\quad \text{et}$$

$$\frac{\alpha M t^4 - \beta M t^6}{2(1+mt^2)(1+nt^2)^3} = \frac{A}{1+mt^2} + \frac{B}{1+nt^2} + \frac{C}{(1+nt^2)^2} + \frac{D}{(1+nt^2)^3},$$

quo quidem ipso fiet

$$M = (F+G) + (nF+mG)t^2, \quad \text{et inde}$$

$$F+G = M, \quad nF+mG = 0, \quad \text{ideoque}$$

$$F = -\frac{mM}{n-m}, \quad \text{et} \quad G = +\frac{nM}{n-m}, \quad \text{tum vero}$$

$$\frac{\alpha M}{2} t^4 - \frac{\beta M}{2} t^6 = A + B + C + D$$
$$+ [3nA + (m+2n)B + (m+n)C + mD]t^2$$
$$+ [3n^2A + (2mn+n^2)B + mnC]t^4$$
$$+ [n^3A + mn^2B]t^6.$$

atque sic omnino

$$A + B + C + D = 0,$$
$$3nA + (m+2n)B + (m+n)C + mD = 0,$$
$$3n^2A + (2mn+n^2)B + mnC = \frac{\alpha M}{2}$$
$$n^3A + mn^2B = -\frac{\beta M}{2}$$

ex quibus denique

$$A = -\left(\frac{\alpha m + \beta}{(n-m)^3}\right)\cdot\frac{M}{2}, \quad B = -\frac{n}{m}A - \frac{\beta M}{2mn^2},$$

$$C = -2B - \left(3 - \frac{m}{n}\right)A, \quad D = B + \left(2 - \frac{m}{n}A\right),$$

$$\int \frac{M\,dt}{(1+mt^2)\,(1+nt^2)} = \frac{F}{\sqrt{m}}\int \frac{dt\sqrt{m}}{1+mt^2} + \frac{G}{\sqrt{n}}\int \frac{dt\sqrt{n}}{1+nt^2}$$

$$= \frac{F}{\sqrt{m}}\,\text{Arc. Tang.}\,t\sqrt{m} + \frac{G}{\sqrt{n}}\,\text{Arc Tang.}\,t\sqrt{n}$$

$$= -\frac{M\sqrt{m}}{n-m}\,\text{Arc Tang.}\,\sqrt{\frac{mx}{h}} + \frac{M\sqrt{n}}{n-m} + \text{Arc.Tang}\sqrt{\frac{nx}{h}},$$

ideoque si statuamus $x = h$, quo adeo hoc ipsum integrale ad universam extendatur atmosphæram

$$\int_0^h \frac{M\,dt}{(1+mt^2)\,(1+nt^2)} = \frac{M\sqrt{n}}{n-m}\,\text{Arc Tang.}\,\sqrt{n} - \frac{M\sqrt{m}}{n-m}\,\text{Arc Tang.}\,\sqrt{m}$$

cujus igitur sic instituemus computationem

| | | |
|---|---|---|
| Logar. $\sqrt{n}$ . . . . | 0.0228594 | |
| Arc.Tang. $\sqrt{n}$ . . . | 46°30′25″.95 . . . | 167425″.95 |
| Log. Arc. Tang. $\sqrt{n}$ . . | 9.90939764 | |
| Compl. Log. $(n-m)$. . | 0.95233969 | |
| Logar. $M$ . . . . | 3.52171954 | |
| Logar. $\sqrt{n}$ . . . . | 0.02285940 | |
| | 4.40631627. . . | + 25486″.27 |
| Logar. $\sqrt{m}$ | 9.9998725 | |
| Arc. Tang. $\sqrt{m}$ | 44°59′29″72 . . . | 161969″.72 |
| Log. Arc. Tang. $\sqrt{m}$ . . | 9.89500872 | |
| Compl. Log. $(n-m)$. . | 0.95233969 | |
| Logar. $M$ | 3.52171954 | |
| Logar. $\sqrt{m}$ | 9.99987250 | |
| | 4.36894045 . . . | — 23385″16 |

unde patebit primum adeo refractionis terminum ad temperaturam glaciei liquantis ex hac hypothesi futurum $= 2101''.11 = 35'1''.11$

## §. 28.

Quod ad secundum attinet terminum, erit ille

$$\int_2 \frac{(\alpha M t^4 - \beta M t^6)\,dt}{(1+mt^2)(1+nt^2)^3} = \int \frac{A\,dt}{1+mt^2} + \int \frac{B\,dt}{1+nt^2} + \int \frac{C\,dt}{(1+nt^2)^2} + \int \frac{D\,dt}{(1+nt^2)^3}$$

$$= \frac{A}{\sqrt{m}} \text{Arc. Tang. } t\sqrt{m} + \frac{B}{\sqrt{n}} \text{Arc. Tang. } t\sqrt{n} + \frac{Ct}{2(1+nt^2)} + \frac{C}{2\sqrt{n}} \text{Arc. Tang. } t\sqrt{n} + \frac{Dt}{4(1+nt^2)^2} + \frac{3Dt}{8(1+nt^2)} + \frac{3D}{8\sqrt{n}} \text{Arc. Tang. } t\sqrt{n},$$

$$= \frac{A}{\sqrt{m}} \text{Arc. Tang. } \sqrt{\frac{mx}{h}} + \frac{(4C+3D)}{8(h+nx)} \cdot \sqrt{hx} + \frac{8B+4C+3D}{8\sqrt{n}} \text{Arc. Tang. } \sqrt{\frac{nx}{h}} + \frac{Dh\sqrt{hx}}{4(h+nx)^2},$$

ideoque, cum pro universa quidem atmosphæra sumendum sit $x = h$, fiet adeo hæc altera pars refractionis astronomicæ horizontalis

$$= \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{A}{\sqrt{m}} \text{ Arc. Tang. } \sqrt{m} + \dfrac{4C + 3D}{8(1+n)} + \dfrac{D}{4(1+n)^2} \\ + \dfrac{8B + 4C + 3D}{8\sqrt{n}} \text{ Arc. Tang. } \sqrt{n} \end{array} \right\}$$

ubi

| | | |
|---|---|---|
| $A =$ | $-$ 13714″·331 . . . . | 4.1371746 |
| $B =$ | $+$ 15243.059 . . . . | 4.1830721 |
| $C =$ | $-$ 1679.877 . . . . | 3.2252775 |
| $D =$ | $+$ 151.149 . . . . | 2.1794053 |
| $4C + 3D =$ | $-$ 6266.061 . . . . | 3.7969946 |
| $8B + 4C + 3D =$ | $+$ 115678.411 . . . . | 5.0632523 |
| $1 + n =$ | 2.111012 . . . . . | 0.3244907 |
| $(1+n)^2 =$ | 4.456371 . . . . . | 0.6489814 |

| | | |
|---|---|---|
| Log. $(8B + 4C + 3D) =$ | 5.0632523 | |
| Compl. Log. 8 . . . . . | 9.0969100 | |
| Compl. Log. $\sqrt{n}$ . . . . | 9.9771406 | |
| Log. Arc. Tang. $\sqrt{n}$ . . . | 9.9093976 | |
| | 4.0467005 . . . | $+$ 11135″264 |
| Logar. $D$ . . . . . | 2.1794053 | |
| Compl. Log. 4 . . . . . | 9.3979400 | |
| Compl. Log. $(1+n)^2$ . . . | 9.3510186 | |
| | 0.9283639 . . . | $+$ 8.479 |
| | | $+$ 11143″743 |
| Logar. $A$ . . . . . | 4.1371746 | |
| Compl. Log. $\sqrt{m}$ . . . . | 0.0001275 | |
| Log. Arc. Tang. $\sqrt{m}$ . . . | 9.8950087 | |
| | 4.0323108 . . . | $-$ 10772.359 |

| | | |
|---|---|---|
| Logar. $(4C + 3D)$ . . . | 3.7969946 | |
| Compl. Logar. 8 . . . . | 9.0969100 | |
| Compl. Logar. $(1 + n)$ . . | 9.6755093 | |
| | 2.5694139 . . . | — 371.034 |
| | | — 11143″.393 |

unde tandem patebit hanc alteram refractionis partem fore $= + 0''.35$, atque sic integram, quæ ex hac hypothesi temperaturæ conveniet glaciei liquantis, refractionem horizontalem futuram $= 35'1''46 = 2101''.46$ sexages $= 64'85''99$ Centés

## §. 29.

Hæc autem cum pro $\varphi(o) = 1$ tantum valeat, animadvertendum porro est, pro statu quolibet Atmosphæræ, qui altitudine definiatur Barometri $= B$, temperatura autem thermometri centesimalis $= + t°$, fore generatim omnino

$$\varphi(o) = \left(\frac{B}{0^m.76}\right) \cdot \left(\frac{800}{800 + 3t}\right) = \frac{1000\,B}{0^m.95(800 + 3t)} \;;$$

tum vero pro diversis ipsius $\varphi(o)$ valoribus variare scilicet refractionem horizontalem in ratione, quæ hujusce fere subtriplicata est, adeo ut generatim admodum

$$R = 2101''.46 \sqrt{\left(\frac{1000\,B}{0^m.95(800 + 3t)}\right)^3} \;;$$

unde si invariatam ponamus Barometri altitudinem $= 0^m.76$ fiet denique pro $t = +10°$, $R = 33'8''.56$. Sed et hæc ipsa quantitas cum intra limites adeo cadat oscillationum, quibus vel excessu, vel defectu ab hac differant valores, quos eidem tribuerunt Astronomi omni sane laude cumulatissimi, dignam omnino præ cæteris eam, de qua agitur, judicavimus hypothesin, ex qua indefinitis etiam a vertice distantiis convenientem liceat determinare refractionem. Tum vero quo faciliorem etiam tabulæ sic oriundæ comparationem reddamus cum iis, quibus maxima omnino tribui solet auctoritas tabulis, primum adeo omnium formulam (12) pro medio Atmosphæræ statu in numeros convertamus, pro quo nempe statuemus altitudinem Barometri $= 0^m.761986 = 30$ pollicibus Anglicis,

temperaturam $= +10°$ ex thermometro centesimali

$\varepsilon = 58''.5019$ . . . . Log. $= 1.7671700$

$= 0.0002836252$ . . Log. . . $6'.4527449$

$h = 0.0033595646$ . . Log. . . $7'.5262830$

fiet utique sic

$$d\varrho = \frac{116''.97062 \operatorname{Sin}\theta . dz}{(1+0.9994329z)\sqrt{\operatorname{Cosin}\theta^2(1+z)^2 + h(1:639647z + 3.660354z^2 + 2.004439z^3 + 0.0033579z^4)}}$$

vel denique, si loco ipsius $z$ substituamus $s-1$,

$$d\varrho = \frac{117''.0370 \operatorname{Sin}\theta . ds}{(s + 0.0005674)\sqrt{\operatorname{Cosin}\theta^2 . s^2 + h(0.00335579\, s^4 + 1.991016\, s^3 - 2.332929\, s^2 + 0.319033\, s + 0.0195237)}}$$

atque sic tandem

$$d\varrho = \operatorname{Tang}\theta . ds . \left\{ \begin{array}{l} \frac{117''.0370}{s^2} - \frac{0.0633}{s^3} - h\, sec.\theta^2\, (0''.196376 \\ + \frac{116''.51115}{s} - \frac{136''.5855}{s^2} + \frac{18''7467}{s^3} + 1''.13192) \\ + h^2\, sec.\theta^4\, (0''000494\, s^2 + 0''.58648\, s + 173''29437 \\ - \frac{407''72302}{s} + \frac{294.86082}{s^2} - \frac{62''08621}{s^3} + \frac{0''.50415}{s^4} \\ + \frac{0.54647}{s^5} + \frac{0.01642}{s^6}) - h^3\, sec\,\theta^6\, (0.00246\, s^3 \\ + 1''.45674\, s^2 + 285''.2463\, s - 1012''4080 \\ + \frac{1327''793}{s} - \frac{781''.8300}{s^2} + \frac{193''.2941}{s^3} - \frac{11''.7823}{s^4} \\ - \frac{1''.9112}{s^5} + \frac{0.1215}{s^6} + \frac{0''.0133}{s^7}) \\ + h^4\, \operatorname{sec}\theta^8\, (0''008567\, s^4 + 3''.37039\, s^3 + 490''.99315\, s^2 \\ - 2341''7277\, s + 4457''.1992 - \frac{4349.6763}{s} \end{array} \right.$$

$$\text{Tang.}\,\theta\,.\,ds\,.\left\{\begin{array}{l}
+\dfrac{2286.0337}{s^2}-\dfrac{610''.1459}{s^3}+\dfrac{61.3246}{s^4}+\dfrac{4''.1262}{s^5}\\
-\dfrac{0''.9598}{s^6}-\dfrac{0''.0257}{s^7}+\dfrac{0''.0048}{s^8}\Big)\\
-h^5\sec\theta^{10}\,(0''.025514\,s^5+7''.5044\,s^4+865''.6711\,s^3\\
-5212''6537\,s^2+13031''.586\,s-17809''.589\\
\dfrac{14465''.919}{s}-\dfrac{7063''.585}{s^2}+\dfrac{1970''.9438}{s^3}-\dfrac{256''3909}{s^4}\\
-\dfrac{3''.4963}{s^5}+\dfrac{3''.8086}{s^6}-\dfrac{0''.1403}{s^7}-\dfrac{0.0337}{s^8}\Big)+\text{&c.}
\end{array}\right.$$

cujus integrale si sumatur ita ut evanescat posito $x = 0$, quod quidem ipsum $s$ efficiet $= 1$, fiet adeo

$$\varsigma = \text{Tang.}\,\theta\left\{\begin{array}{l}
117''.0038-\dfrac{117''.0370}{s}+\dfrac{0.0332}{s^2}\\
-h\sec\theta^2\,(116''.5112\ \text{Log Hyp.}\,s-127''0312+0''.1964\,s\\
-\dfrac{9''.3734}{s^2}+\dfrac{136''.5855}{s}-\dfrac{0''.3773}{s^3}\Big)\\
+h^2\sec\theta^4\,(90''.5379+0''0002\,s^3+0''.2932\,s^2\\
+173''.2944\,s-407''.7230\ \text{Log. Hyp.}\,s\\
-\dfrac{294''.8608}{s}+\dfrac{31''0431}{s^2}-\dfrac{0''.1681}{s^3}-\dfrac{0''1366}{s^4}\\
-\dfrac{0''.0033}{s^5}\Big)-h^3\,\text{Sec}\,\theta^6\,(179''.7371+0''.0006\,s^4
\end{array}\right.$$

$$\text{Tang. } \theta \left\{ \begin{array}{l} + \; 0''.4856\, s^3 + 142''6231\, s^2 - 1012''4080\, s + \\ 1327''7930 \text{ Log Hyp. } s + \dfrac{781.8300}{s} - \dfrac{96''.6471}{s^2} \\ + \dfrac{3''9274}{s^3} + \dfrac{0''.4778}{s^4} - \dfrac{0''0243}{s^5} - \dfrac{0''0022}{s^6} \Big) \\ + h^4 \text{ Sec } \theta^8 \left( - 1448''6057 + 0''0017\, s^5 + 0.8426\, s^4 \right. \\ + 163''.6644\, s^3 - 1170''.8638\, s^2 + 4457''.1992\, s \\ - 4349''.6763 \text{ Log. Hyp. } s - \dfrac{2286.0337}{s} + \dfrac{305''0730}{s^2} \\ \left. - \dfrac{20''.4415}{s^3} - \dfrac{1''.0316}{s^4} + \dfrac{0.1920}{s^5} + \dfrac{0''0043}{s^6} \right) \\ - h^5 \text{ Sec } \theta^{10} \left( 6649''.7071 + 0''.0042\, s^6 + 1''.5009\, s^5 \right. \\ + 216.4178\, s^4 - 1737''.5512\, s^3 + 6515''.7930\, s^2 \\ - 17809''5890\, s + \dfrac{7063.5850}{s} + 14465''.919 \text{ Log. Hyp. } s \\ - \dfrac{985.4719}{s^2} + \dfrac{85.4636}{s^3} + \dfrac{0''.8741}{s^4} - \dfrac{0''.7616}{s^5} \\ \left. + \dfrac{0''0234}{s^6} + \dfrac{0''0048}{s^7} \right) + \text{ &c.} \end{array} \right.$$

ideoque cum hoc ipsum integrale ad universam atmosphæram extendendo, fiat $x = h$, et inde $z = 1$, vel $s = 2$, prodibit adeo tandem refractio quam universa inducit atmosphæra, sive

$$r = \text{Tang.}\,\theta \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 58''.493601 \\ 1.76710835 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -\ 20''.02331 \\ 1.30153587 \end{array}\right\} . h\,\text{Sec}\,\theta^2 \\ \left.\begin{array}{l} +\ 15''.98960 \\ 1.2038376 \end{array}\right\} h^2\,\text{Sec}\,\theta^4 \quad \left.\begin{array}{l} -\ 16''.93740 \\ 1.2288467 \end{array}\right\} h^3\,\text{Sec}\,\theta^6 \\ \left.\begin{array}{l} +\ 20''.86050 \\ 1.3193247 \end{array}\right\} h^4\,\text{Sec}\,\theta^8 \quad \left.\begin{array}{l} -\ 27''.42660 \\ 1.4381720 \end{array}\right\} h^5\,\text{Sec}\,\theta^{10} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad (15)$$

atque ex hac denique formula sequentem confecimus tabulam, cui, comparationis causa, eas etiam adjunximus refractiones, quæ ex aliis prodierunt diversorum Astronomorum formulis; tum vero, cum differentiæ quibus duæ quælibet inter se discrepent tabulæ, vel a diversis oriri possint, quos ipsi $\varepsilon$ tribuerunt valoribus, vel etiam a functionum, ex quibus enatæ sint, diversitate, duplicem pro Besselio exhibuimus tabulam; alteram scilicet, qualis ex valore prodit pro $\varepsilon$, quem ipse in Ephemeridibus Astronomicis Berolinensibus pro 1826 adhibendum censuit, alteram, qualis ex eo proditura fuisset, quem nos adhibuimus, valore.

## TABULA REFRACTIONUM

pro altitudine Barometri = $0^m.761986$ = 30 poll. Anglic.
et temperatura Atmosphæræ = + 10° ex thermom. Centes.

| D. Z. | Hypoth. | Laplace | Young | Brinkley | Bessel. 1. | Bessel. 2. | Piazzi. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10° | 10″.30 | 10″.30 | 10″.20 | 10″.31 | 10″.24 | 10″.30 | 10″.32 |
| 20° | 21″.26 | 21″.26 | 21″.20 | 21″.26 | 21″.14 | 21″.26 | 21″.05 |
| 30° | 33″.72 | 33″.72 | 33″.60 | 33″.77 | 33″.53 | 33″.72 | 33″.69 |
| 40°. | 48″.99 | 48″.99 | 48″.80 | 49″.08 | 48″.71 | 48″.99 | 48″.73 |
| 45° | 58″.36 | 58″.36 | 58″.10 | 58″.29 | 58″.03 | 58″.36 | |
| 50° | 69″.52 | 69″.52 | 69″.30 | 69″.51 | 69″.12 | 69″.52 | 69″.18 |
| 60° | 100″.85 | 100″.86 | 100″.50 | 100″.82 | 100″.27 | 100″.84 | 101″.16 |
| 70° | 159″.17 | 159″.23 | 158″.70 | 159″.09 | 158″.22 | 159″.12 | 160″.02 |
| 75° | 214″.70 | 214″.85 | 214″.30 | 214″.67 | 213″.37 | 214″.59 | |
| 80° | 320″.09 | 320″.65 | 320″.00 | 320″.64 | 318″.07 | 319″.88 | 320″.33 |
| 81° | 353″.62 | 354″.27 | 354″.00 | | 351″.39 | 353″.39 | |
| 82° | 394″.40 | 395″.40 | 395″.00 | | 391″.98 | 394″.22 | |
| 82°.5 | 418″.27 | | | | | | |
| 83° | 444″.92 | 446″.31 | 447″.00 | | 442″.36 | 444″.88 | |
| 83°.5 | 474″.92 | | | | | | |
| 84° | 508″.91 | 511″.25 | 512″.00 | | 506″.35 | 509″.24 | |

### §. 30.

Nimii forsitan in hac explicanda fuimus hypothesi, utpote mere geometrica, quæ profecto legem secundum quam densitates in atmosphæra ascendendo revera decrescant, exprimere minime est censenda; interim tamen ex hac ipsa explicatione id saltem assecuti sumus, ut omnino ap-

pareat, ipsum illud de quo agitur refractionum determinandarum opus, pauxillulum admodum ab hac eadem adfici lege; unde spes profecto erit, futurum scilicet sic, ut si vel summatim tantum veram liceat functione quadam comprehendere atmosphæræ constitutionem, nihil omnino majoris momenti desiderandum Astronomicis usibus amplius supersit. Hoc autem nos attigisse ut nobis persuadeamus, non sufficit tantum refractionum, sive terrestrium, sive astronomicarum aliquatenus satisfecisse phænomenis; quippe scilicet cum haud omnino minoris sit momenti temperaturam etiam describere, quæ, pro data qualibet ad libellam maris caloris ratione, datæ cuilibet supra hanc in atmosphæra conveniat altitudini, neque observationes negligendæ sint Barometricæ, quarum adeo eximius est usus in regionibus commode ad libram explorandis.

Jam quo ad ejusmodi scientiam, quoad ejus fieri possit, si non penitus attingendam, at certe omni studio expetendam, aditum quodammodo nobis aperiamus, ab ipsis initium sumamus, quarum in sequentibus mentio sæpius occurret, determinandis unitatibus cum elasticitatis absolutæ, tum densitatum; et quidem pro elasticitatum absolutarum unitate eam sumamus, quæ pressioni æquipollet

Barometri $= o^m.76$ ad temperaturam glaciei liquantis sumendi; pro densitatum autem unitate eam, quæ aëris est atmosphærici (ad temperaturam $+ 10°$ ex thermometro centesimali) pro illa ipsa, quam modo statuimus absolutæ elasticitatis unitate. Porro sit

$a$ . . . . radius curvaturæ meridiani terrestris ad latitudinem $45° = 6366131^m$, . . . Log. $a = 6.8038756$

$\tau.a$ . . . subtangens barometrica temperaturæ conveniens $+ 10°$, pro latitudine $45°$

$= 8261^m.844$ . . . . . Log. $\tau a = 3.9170770$

$\tau$ . . . . $= 0.001297781$ . . . . Log. $\tau = 7'.1132914$

$1 + e$ . . . . exponens rationis, quam sinus anguli incidentiæ ad sinum habet anguli refracti pro radio lucis, ubi hæc a vacuo transit in aërem atmosphæricum, cujus densitatem unitati assumsimus æqualem, ideoque

$\varepsilon$ . . . . $= 58''34943$ . . . . . Log. $\varepsilon = 1.7660366$

$= 0.000282886$ . . . . $= 6'.4516114$

atque posito $x.a$ indefinitam exhibere puncti cujuslibet $M$ supra libellam maris elevatione $MH$, statuamus etiamnum $B$ . . . . convenientem huic exhibere Barometri altitudinem ad temperaturam glaciei liquantis pro Hydrargyro reductam,

$t$ . . . . temperaturam atmosphæræ,

$\varphi$ . . . . densitatem aëris,

$\omega$ . . . . absolutam ejusdem elasticitatem, atque tandem

$\psi$ . . . . elasticitatem specificam, ubi videlicet ea, quæ temperaturæ convenit $+ 10^{\circ}$ pro unitate habetur,

tum vero ad extremum ponamus

$b$
$t(o)$
$\varphi(o)$
$\omega(o)$
$\psi(o)$

hisce correlatas omnino exhibere quantitates, quæ eodem temporis momento ad ipsam maris libellam valeant.

Erit utique ex ipsa elasticitatis absolutæ notione

$$\omega : 1 = B : 0^{m}.76 ,$$

atque ex Gay Lussaci et Daltoni observationibus

$$\psi : 1 = 800 + 3t : 830.$$

Sed et ex lege Mariottii (ea qua par est latitudine sumenda, qua nempe cum ad diversas ejusdem fluidi temperaturas, tum etiam ad diversa omnino fluida aëriformia adhiberi possit), elasticitates fluidorum aëriformium absolutæ rationem sequuntur compositam ex densitatum, atque elasticitatum specificarum directa. Igitur erit omnino

$$\omega : 1 = (\varphi : 1) . (\psi : 1)$$

et inde

$$\omega = \psi . \varphi \quad . . . . . \quad (16)$$

nec non $$b : 0^m . 76 = [\varphi(o) : 1] . [\psi(o) : 1],$$

$$\varphi(o) : 1 = [b : 0^m . 76] . [1 : \psi(o)]$$

et $$d\omega = \psi . d\varphi + \varphi . d\psi .$$

Rursus, cum $x$ primigenia illa sit variabilis, ex qua reliquæ omnes, pro dato quolibet temporis momento, pendere ultimo sunt censendæ, patebit adeo differentiale elasticitatis absolutæ $\omega$ ad sui unitatem rationem habere, quam pondus aëris atmosphærici (ad altitudinem utique $x.a$ sumendi) cujus $a.dx$ sit altitudo et $\varphi$ densitas, ad pondus habet columnæ juxta ipsam maris libellam sumendæ, cujusque $\tau . a$ altitudo fuerit, et densitas ipsa illa, quam pro densitatum unitate in antecedentibus assumsimus. Sed et hæc ipsa pondera cum vires exhibeant motrices massarum suo quæque volumine comprehensarum, hæ autem in genere rationem sequantur ex massarum atque virium acceleratricium directa compositam; ipsæ autem vires acceleratrices pro constantibus scilicet sint habendæ, siquidem decrementi nullam habeamus rationem cui ex diversa altitudine obnoxiam omnino constat esse gravitatem; hoc autem ipsum si consideretur decrementum, decrescent illæ in eadem ratione, qua $(1 + x)^2$ crescet; patebit adeo

*Si nullam decrescentis gravitatis rationem habeamus*

**futurum** $d\omega : 1 = (\varphi : 1) . (dx : \tau)$

**sive** $$d\omega = -\frac{\varphi dx}{\tau}$$

**et inde** $$\psi . d\varphi + \varphi . \psi = -\frac{\varphi dx}{\tau} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

*Si autem decrementi rationem habeamus*

$$d\omega : 1 = (\varphi : 1) . (dx : \tau) . [1 : (1 + x)^2]$$

**ideoque** $$d\omega = -\frac{\varphi dx}{\tau (1 + x)^2}$$

**vel denique** $$\psi . d\varphi + \varphi . d\psi = -\frac{\varphi dx}{\tau (1 + x)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

## §. 31.

Allatæ modo æquationes generatim admodum, quamvis implicite, eam definiunt rationem, qua densitates ex data qualibet pro elasticitatibus specificis, et vicissim elasticitates specificas ex data qualibet pro densitatibus functione, concessis scilicet quadraturis, semper eruere liceat; ideoque sic altera nobis se jam etiam offert in ipsam atmosphæræ dispositionem inquirendi ratio, ea scilicet, qua denique ipsæ hæ elasticitates specificæ, atque ex hac facili admodum negotio deducendæ temperaturæ ab ea pendeant, ad quam easdem supra libellam maris consideremus elevatio-

nem. Tum vero, quo a simplicioribus, ut fieri solet, ad composita magis progrediamur, prima sane omnium ea consideranda est hypothesis, qua elasticitates specificæ eædem esse statuantur pro universa atmosphæra; et quidem cum sic fiat

$$\psi = \psi(o), \qquad \text{sive} \qquad d\psi = 0,$$

et inde per æquationem (18)

$$\psi(o) \cdot d\varphi = -\frac{\varphi dx}{\tau(1+x)^2},$$

fiet adeo, per integrationem ita institutam, ut prodeat $\varphi = \varphi(o)$, sumendo scilicet $x = 0$,

$$\text{Logar. Hyp.} \left(\frac{\varphi}{\varphi(o)}\right) = -\frac{x}{\tau \cdot \psi(o)[1+x]}$$

ideoque profecto

$$\varphi = \varphi(o) \cdot e^{-\frac{x}{\tau \cdot \psi(o)[1+x]}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

$$= \varphi(o) \cdot e^{-\frac{x}{\tau \cdot \psi(o)}} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{\tau \cdot \psi(o)} - \frac{x^3}{\tau \cdot \psi(o)} + \&c.\right) \ldots (19.1)$$

quæ denique formula si per $dx$ multiplicetur, tum vero oriundum adeo differentiale $\varphi dx$ ita integremus, ut evanescat integrale $\int \varphi dx$ sumendo $x = o$, fiet utique

$$\left.\begin{aligned}\int \varphi dx = {} & \tau . \psi(o) . \varphi(o) \left(1 + 2\tau . \psi(o) - 6\tau^2 . \psi(o)^2\right) . \left(1 - e^{-\frac{x}{\tau . \psi(o)}}\right) \\ & - \varphi(o) \left(2\tau . \psi(o) . x + x^2\right) . e^{-\frac{x}{\tau . \psi(o)}} \\ & + \varphi(o) \left(6\tau^2 . \psi(o)^2 . x + 3\tau . \psi(o) . x^2 + x^3\right) . e^{-\frac{x}{\tau . \psi(o)}}\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Jam quod ad æquationem attinet (19), patebit utique ex ea, $\varphi(o) . e^{-\frac{1}{\tau . \psi(o)}}$ limitem fore decrescentium ipsius $\varphi$ valorum, prout equidem $x$ in infinitum usque crescere statuatur. Tum vero cum $\frac{1}{\tau . \psi(o)}$ ingens omnino sit numerus, neque ab oscillationibus temperaturæ atmosphæricæ septingenario minor umquam evadere possit, exiguus adeo hic limes evadit ut tantum non evanescat, atque profecto, nostrorum saltem habita ratione sensuum, numquam non pro absolute nihilo haberi possit; unde sequitur, quo universæ adeo obtineamus atmosphæræ pondus, sumendum scilicet esse integrale $\int \varphi dx$ intra limites valorum $x = 0$, et $x = +\infty$, quod quidem sic exhibebimus $\int_0^\infty (\varphi dx)$; quo autem pondus obtineatur atmosphæræ punctum $M$ superincumbentis, idem sumendum esse integrale intra li-

mites valorum $x = x$, et $x = +\infty$. Sed et cum $e^{-ax} x^n$ numquam non evanescat posito $x = +\infty$, fiet utique ex æquatione (20)

$$\int_0^{+\infty} (\varphi\, dx) = \tau . \psi(0) . \varphi(0) \,(1 + 2\tau . \psi(0) - 6\tau^2 . \psi(0)^2) \;\; . \; . \; (20.1)$$

atque proinde

$$\left.\begin{aligned} \int_x^{\infty} (\varphi dx) = \tau . \psi(0) . \varphi(0) . e^{-\frac{x}{\tau . \psi(0)}} & (1 + 2\tau . \psi(0) - 6\tau^2 . \psi(0)^2) \\ + \varphi(0) . e^{-\frac{x}{\tau . \psi(0)}} & \cdot (2\tau . \psi(0) . x + x^2) \\ - \varphi(0) . e^{-\frac{x}{\tau . \psi(0)}} & \cdot (6\tau^2 . \psi(0)^2 x + 3\tau . \psi(0) x^2 + x^3) \end{aligned}\right\} (20.2)$$

ideoque cum sit profecto

$$b : B = \int_0^{\infty} (\varphi\, dx) : \int_x^{\infty} (\varphi\, dx) \;\; ,$$

fiet adeo tandem

$$b : B = e^{+\frac{x}{\tau . \psi(0)}} \cdot (1 + 2\tau . \psi(0) - 6\tau^2 . \psi(0)^2) : (1 + 2\tau . \psi(0)$$

$$- 6\tau^2 : \psi(0)^2 + 2x + \frac{x^2}{\tau . \psi(0)} - 6\tau . \psi(0) . x - 3x^2 - \frac{x^3}{\tau . \psi(0)})$$

$$= e^{+\frac{x}{\tau . \psi(0)}} : 1 + 2x + \frac{x^2}{\tau . \psi(0)} - 10\tau \psi(0) x^2 - 5x^2 - \frac{x^3}{\tau . \psi(0)}$$

atque sic quidem

$$e^{\frac{x}{\tau\cdot\psi(o)}} = \frac{b}{B}\left(1 + 2x + \frac{x^2}{\tau\cdot\psi(o)} - 10\tau x\cdot\psi(o) - 5x^2 - \frac{x^3}{\tau\cdot\psi(o)}\right) \quad (21)$$

vel denique logarithmos hyperbolicos ex utraque parte sumendo

$$\left.\begin{aligned} x\cdot a &= \tau\cdot\psi(o)\cdot a\cdot \text{Logar. Hyperb.}\left(\frac{b}{B}\right) \\ &+ \left(2\tau\cdot\psi(o) + x - 10\tau^2\cdot\psi(o)^2 - \frac{19\tau x}{3}\cdot\psi(o) - \frac{7x^2}{3} - \frac{4x^3}{3.\tau\psi(o)}\right).xa \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

ubi omnino observandum est, tam $\tau.\psi(o)$ quam $x$ (siquidem de altitudinibus agatur ex observationibus Barometricis determinandis) numquam non exiguos adeo esse numeros, ut profecto statuere liceat

$$xa = \tau a\cdot\psi(o)\ \text{Log. Hyp.}\left(\frac{b}{B}\right) + (2\tau\cdot\psi(o) + x).xa \quad . \quad . \quad . \quad (22.1)$$

vel tandem, si nulla habeatur ratio gravitatis ab altitudine decrescentis,

$$x\cdot a = \tau a\cdot\psi(o)\ \text{Log. Hyp.}\left(\frac{b}{B}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22.2)$$

## §. 32.

Hæc adeo demonstrata caput, ut ita dicam, illius efficiunt formulæ, ex qua altitudines in atmosphæra utcunque sumendas, quæ datis conveniant Barometri observa-

tionibus, determinare licet; et quidem plurimum quamvis ab observatis, ad diversas supra libellam maris elevationes, temperaturæ atmosphæræ variationibus discrepet hæc ipsa hypothesis de elasticitate specifica per universam atmosphæram ubiquaque eadem, nihilotamen minus ipsis saltem altitudinum determinationibus intra limites pro re, de qua agitur, satis omnino arctos, egregie satisfacit, præsertim ubi pro temperatura eam adhibeamus, quæ media est inter eas, quæ ad superiorem, et quæ ad inferiorem locum habeat stationem; Atque si isthæc ad quantitates traducamus, quas expeditione sua aëronautica anno 1804 instituta obtinuit Gay-Lussacius, ubi nempe

$\tau a$ pro latitudine observatorii Parisiensis $= 8258^m.761$,
et inde $\tau$ . . . . . $= 0.001297289$,
temperatura atmosphæræ media . . . $= + 10°.65$,
huic conveniens elasticitas specifica $\psi(o) = 1.0023494$,
tandem $b = 0^m.7628261$, et $B = 0^m.3299572$,

prodibit utique ex his quæ sequitur computationis ratio

| | | |
|---|---|---|
| Logar. $b$ . . . . . | 9 8824256 | |
| Logar. $B$ . . . . | 9.5184576 | |
| | 0.3639680 . . . . | |
| Log. Modul. . . . | 0.3622157 | |
| Logar. $\tau a$ . . . . | 2.9169124 | |
| Log. $(L.b - L.B)$ . . | 9.5610632 | |
| Logar. $\psi(o)$ | 0.0010191 | |
| | 3.8412104 . . . . | $6937^m.618$ |

| | | |
|---|---|---|
| Logar. $2\tau . \psi(o)$ . . | 7.4150859 | |
| | 1.2562963 . . . . | $+ 18^m.042$ |
| Logar. $x$ . . . . . | 7.0373348 | |
| | 3.8412104 | |
| | 0.8785452 . . . . | $+ 7^m.560$ |
| et inde tandem $x.a$ . . . . | $=$ | $6963^m.22$ |

ex quibus adeo manifeste patet, si nullam prorsus haberemus rationem decrescentis ab altitudine gravitatis, proditurum fuisse pro folle aëronautico Gay-Lussacii errorem $= 25^m.602$, atque generatim omnino errorem, qui ab ipsa penderet ea, quæ determinanda foret altitudine; et quidem a geometrico desistentes rigore, si cum solummodo spectemus, quem observationes quodammodo heic præstant, licebit utique rationibus numquam non abunde sufficientibus assumere

$$x.a = \tau a(1 + 2\tau + x) . \psi(o) . \text{Log.}\left(\frac{b}{B}\right) ,$$

ubi $x$ exigua adeo est fractio, ut ne quidem pro altitudine bis mille metrorum limitem exsuperet 0.00031416, ideoque profecto sine errore sensibili constantem pro eadem adhibere licet valorem, hujusce nempe ipsius limitis dimidium $=$ 0.00015708; ex quo, cum pro coëfficiente $1 + 2\tau + x$ valor prodeat constans, scilicet

$$1 + 2\tau + x = 1 + 0.002595562 + 0.00015708$$
$$= 1.002752642,$$

fiet adeo pro latitudine 45 graduum

$$\tau a(1 + 2\tau + x) = 8284^m.586$$

unde sequitur coëfficientem Barometricam pro hac eadem latitudine, nulla scilicet habita ratione illius quod in atmosphæra contineatur humidi, futuram omnino $= 19075^m.97$, vel ad temperaturam glaciei liquantis $= 18386^m.48$

## §. 55.

Utcunque autem, pro diversitate locorum ex observationibus Barometricis ad libram examinanda, accurata penitus, omnique numero absoluta carere liceat cognitione legis, ex qua principium caloris per universam dispertitum sit atmosphæram, nihilo tamen minus cum profecto constet temperaturam atmosphæræ a crescentibus supra libellam maris altitudinibus notabiliter admodum decrescere, fieri omnino non poterit, quin et inde alterationem aliquam ipsæ subeant, quas modo attulimus, formulæ hypsometricæ. Sed enim multo adhuc majus est discrimen futurum, ut refractiones, quæ devianti nimium ab ipsa naturæ constitutione de elasticitatibus specificis hypothesi conveniunt, immane quantum sint aberraturæ. Tum vero, cum sic sa-

ne necessitas appareat diligentius quodammodo inquirendi in hanc ipsam de elasticitatibus specificis legem, duplex omnino sese nobis aperit futuræ disquisitionis via, altera scilicet, qua a $\psi$ incipiamus tamquam functione considerandā ipsius $x$; altera, qua hæc eadem pro functione habeatur ipsius $\varphi$. Utramlibet autem ingredi liceat, nulla certe neque majore se commendat simplicitate, neque priore se considerandam offert loco, quam functio linearis, qua scilicet statuamus

$$\psi = \psi(o) . \left( 1 - \frac{x}{h} \right) ,$$

et ex qua per differentiationem

$$d\psi = - \frac{\psi(o)}{h} . dx .$$

Sed et hoc loco primum omnium animadvertisse haud ab re duxerim, quamcunque statuamus esse, pro ingentibus supra libellam maris elevationibus, qua temperaturæ decrescant legem, certe admodum lente adeo istas decrescere, ut in antecedente hac, quæ ipsam tantum rerum respiciat summam, de elasticitatibus specificis disquisitione, omnem tuto postponere liceat decrementi rationem, cui ipsam vim gravitatis constat esse obnoxiam; quare, cum ex æquatione (17) prodeat

$$\frac{d\varphi}{\varphi} + \frac{d\psi}{\psi} = -\frac{dx}{\tau \cdot \psi}$$

obtinebitur ex hac, siquidem pro $\psi$ et $d\psi$ valores substituamus, quos modo exhibuimus.

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{\tau \cdot \psi(o) - h}{\tau \cdot \psi(o)} \cdot \frac{dx}{h - x}$$

cujus denique integrationem ita instituendo ut prodeat $\varphi = \varphi(o)$ ponendo $x = o$, fiet adeo

$$\text{Logar.}\left(\frac{\varphi}{\varphi(o)}\right) = \frac{h - \tau \cdot \psi(o)}{\tau \cdot \psi(o)} \text{ Logar.}\left(1 - \frac{x}{h}\right)$$

et inde tandem

$$\varphi = \varphi(o)\left(1 - \frac{x}{h}\right)^{\frac{h - \tau \cdot \psi(o)}{\tau \cdot \psi(o)}} \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

ex quo cum evanescat utique $\varphi$ posito $x = h$, manifeste adeo patet ipsam fore atmosphæræ altitudinem $= h$

## §. 34.

Jam quo hanc eandem determinemus altitudinem, multiplicetur æquatio (23) per $dx$, atque fiet

$$\varphi \cdot dx = \varphi(o) \cdot dx \left(1 - \frac{x}{h}\right)^{\frac{h - \tau \cdot \psi(o)}{\tau \cdot \psi(o)}}$$

cujus integrationem ita instituendo, ut evanescat integrale $\int \varphi dx$ sumendo $x = o$, prodibit adeo

$$\int_o^x (\varphi dx) = \tau \cdot \psi(o) \cdot \varphi(o) \cdot \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{x}{h} \right)^{\frac{h}{\tau \cdot \psi(o)}} \right\}$$

ideoque $\int_o^h (\varphi dx) = \tau \cdot \psi(o) \cdot \varphi(o)$, atque proinde

$$\int_x^h (\varphi dx) = \int_o^h (\varphi dx) - \int_o^x (\varphi dx),$$

$$= \tau \cdot \psi(o) \cdot \varphi(o) \cdot \left( 1 - \frac{x}{h} \right)^{\frac{h}{\tau \cdot \psi(o)}},$$

$$= \tau \cdot \psi(o) \cdot \varphi(o) \cdot \left( \frac{\psi}{\psi(o)} \right)^{\frac{h}{\tau \cdot \psi(o)}}$$

nec non $\int_o^h (\varphi dx) : \int_x^h (\varphi dx) = [\psi(o) : \psi]^{\frac{h}{\tau \cdot \psi(o)}}$,

Sed et per demonstrata in antecedentibus

$$b : B = \int_o^h (\varphi dx) : \int_x^h (\varphi dx),$$

igitur fiet tandem

$$b : B = (\psi(o) : \psi)^{\frac{h}{\tau \cdot \psi(o)}}, \qquad \text{unde}$$

$$\text{Log. } b - \text{Log. } B = \frac{h}{\tau . \psi(o)} (\text{Log. } \psi(o) - \text{Log. } \psi)$$

atque ex hoc adeo

$$h = \tau . \psi(o) \left( \frac{\text{Log. } b - \text{Log. } B}{\text{Log. } \psi(o) - \text{Log. } \psi} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

tum vero sic denique

$$x . a = \frac{h a}{\psi(o)} [\psi(o) - \psi]$$

$$= \tau a [\psi(o) - \psi] . \left( \frac{\text{Log. } b - \text{Log. } B}{\text{Log. } \psi(o) - \text{Log. } \psi} \right) . \quad . \quad . \quad (25)$$

Quo jam ista ad observationes Gay-Lussacii applicemus, erit

| | | | |
|---|---|---|---|
| $b$ | $= 0^m.7628261,$ | $B$ | $= 0^m.3299572,$ |
| $t(o)$ | $= + 30°.8,$ | $t$ | $= - 9°.5,$ |
| $\psi(o)$ | $= 1.0751807,$ | $\psi$ | $= 0.9295180,$ |
| $\psi(o) - \psi$ | $= 0.1456627,$ | $\tau a$ | $= 8258^m.714,$ |

quibus valoribus adhibitis, computationem ex hoc instituimus diagrammate

| | |
|---|---|
| Log. $\psi(o)$ . . . . . | 0.0314815 |
| Log. $\psi$ . . . . . | 9.9682578 |
| | 0.0632237 |
| Log. [L. $\psi(o)$ — L. $\psi$] . . | 8.8008799 |
| Log. (L. $b$ — L. $B$) . . . | 9.5610632 |
| | 0.7601833 |
| Log. $\tau a, \psi(o)$ . . . . . | 3.9483939 |
| | 4.7085772 . . . $51118^m.39 = h.a,$ |

| | | |
|---|---|---|
| Log. $ha$ . . . . . | 4.7085772 | |
| Log. $\psi(o)$ . . . . . | 0.0314815 | |
| | 4.6770957 | |
| Log. $[\psi(o) - \psi]$ . . . . | 9.1633482 | |
| | 3.8404439 | . . . . $6925^m.384$ |

Cum igitur, in eadem gravitatis pro variis a centro telluris distantiis invariatæ hypothesi, hæc eadem altitudo prodiit $= 6937^m.618$ in hypothesi temperaturæ uniformis, et quidem medio æqualis arithmetico inter eas quas ad utramque (superiorem scilicet atque inferiorem) observare licuit stationem; at $= 6925^m.384$ solummodo in hypothesi temperaturæ juxta progressionem arithmeticam decrescentis; patebit utique $— 12^m.234$ correctionem adeo esse pro hac altitudine vitio debitam hypotheseos de temperatura uniformiter per universam atmosphæram distributa; quæ igitur si adhibeatur, fiet equidem sic altitudo quam quærimus, ex hypothesi temperaturæ juxta progressionem arithmeticam decrescentis, $= 6950^m.968$, ubi nempe ipsius etiam decrementi ratio habeatur, quo gravitatis afficiatur vis.

## §. 55.

Ex æquatione (23) manifestum fit, ipsam illam, de qua heic agitur hypothesin elasticitatis specificæ juxta pro-

gressionem arithmeticam decrescentis, cum hypothesi penitus convenire densitatum in eadem progressione decrescentium, in illo singulari prorsus casu, quo

$$h - \tau \cdot \psi(o) = \tau \cdot \psi(o), \quad \text{vel denique} \quad h = 2\tau \cdot \psi(o)$$

et quidem hoc ipso casu futurum

$$\varphi : \varphi(o) = \psi : \psi(o) = h - x : h \ .$$

Rursus, cum generaliter admodum demonstravimus esse

$$b : B = [\psi(o) : \psi]^{\frac{h}{\tau \cdot \psi(o)}} ,$$

fiet adeo hoc casu

$$b : B = [\psi(o) : \psi]^2$$

ideoque profecto $\psi = \psi(o) \cdot \sqrt{\frac{B}{b}}$

vel si loco ipsorum $\psi$ et $\psi(o)$ horum substituamus valores functionibus ipsorum $t$ et $t(o)$ definitos

$$800 + 3t = [800 + 3t(o)] \cdot \sqrt{\frac{B}{b}}$$

tum vero, si ex hac formula valorem quæramus ipsius $t$ pro aëronautica Gay-Lussacii expeditione ex observatis ipsorum $t(o)$, $b$ et $B$ valoribus determinandum, prodibit utique

$$t = -71^\circ.028$$

qui igitur immane quantum ab observato discrepat $= -9^\circ.5$ .

Sed et, cum ex ea quam tractamus hypothesi

$$\psi = \psi(o) \cdot \left(1 - \frac{x}{2\tau \cdot \psi(o)}\right)$$

ideoque per differentiationem

$$d\varphi \quad \text{sive} \quad \frac{3\,dt}{830} = -\frac{dx}{2\tau} \,,$$

ex quo scilicet $dx = -\frac{3\tau}{415} \cdot dt$,

fiet adeo tandem $a\,dx = -\frac{3\tau a}{415} \cdot dt$;

unde sumendo $dt = -1$, prodibit $a.dx = +\ 59^m.701$, quod quidem indicio est fore ut temperatura atmosphæræ uno gradu decresceret a differentia 59.7 metrorum in elevatione. Nimis admodum hæc ipsa determinatio ab observationibus discrepat, neque profecto hæ nos sinunt ipsam $a\,dx$ 150 metris minorem assumere; ideoque, tolerabiliter omnino quamvis refractionibus astronomicis ad distantiam usque 80 graduum a vertice observatis satisfaciat hypothesis densitatum in progressione arithmetica decrescentium, nihilo tamen minus cum hæc, tum allata modo cum Lussacii observatione comparatio absolute ejusdem evincunt contra ipsam rerum constitutionem repugnantiam.

§. 36.

## §. 36.

Hunc igitur singularem prorsus rejicientes casum, quo scilicet $h = 2\tau . \psi(o)$, ponamus jam generaliter admodum

$$\frac{\tau . \psi(o)}{h - \tau . \psi(o} = n,$$

quo quidem ipso fiet

$$\frac{h}{\tau . \psi(o)} = \frac{n + 1}{n} = 1 + \frac{1}{n},$$

atque ex observatione G. Lassach

$$n = \frac{1}{4.756829} = 0.2102241$$

patebit utique ex demonstratis in antecedentibus, ipsam tamen, de qua etiamnum, agitur hypothesin, cum ea omnino conspirare, qua statuatur

$$\psi : \psi(o) = \varphi^n : \varphi(o)^n,$$

atque, si hunc eundem adhibeamus valorem, futurum

$$\frac{b}{B} = \left(\frac{\psi(o)}{\psi}\right)^{\frac{n+1}{n}}, \qquad \text{et inde } \psi = \psi(o)\left(\frac{B}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

Quemcunque autem ipsi $n$ attribuamus valorem, hoc saltem modo tollenda numquam ea supererit difficultas, qua temperatura necessario assumenda foret, cui conveniens non tantum specifica aëris elasticitas, sed et volumen pro data qualibet massa in nihilum absolute redigeretur.

Utrumque scilicet horum primis omnino materiæ notionibus aperte repugnat, neque profecto huic ipsi difficultati subvenire possumus, nisi limitem assumendo, ad quem, tamquam asymptoton, temperaturæ (in atmosphæra ascendendo) continuo accedant, et quidem ad quem propius quam data quadam distantia ultimo perveniant, numquam autem absolute attingant. Hujusmodi igitur pro elasticitatibus specificis assumentes limitem $= \alpha$, duobus omnino modis hoc fieri potest, vel scilicet $\psi$ pro functione habendo ipsius $x$, quo quidem casu assumere licet

$$\psi - \alpha : \psi(o) - \alpha = \varphi^n : \varphi(o)^n ,$$

vel denique $\psi$ pro functione habendo ipsius $x$, quo nempe casu assumere liceret

$$\psi = \frac{\alpha x + \beta . \psi(o)}{x + \beta} = \alpha + \frac{\beta . \psi(o) - \alpha\beta}{x + \beta} .$$

Jam quod ad physicas rationes, quæ a prima faciunt hypothesi, sponte omnino animum attendenti occurrit, spatia regionum cœlestium, in quibus planetæ moventur, absolute esse pellucida, neque ullam in his locum habere, sive luminis diminutionem a defectu pellucidatis oriundam, sive temperaturæ variationem, quæ vel proxime ipsius solis attribuatur radiis, vel secundo etiam loco radianti ex planetis calori; et profecto, quamprimum radius quilibet lu-

minis intra atmosphæræ pervenerit limites, intensitatis orituram diminutionem aliquam, quæ cum ex photometricis Lamberti atque Bougueri experimentis, pro dato scilicet profunditatis ad quam penetraverit differentiali, atque eadem manente constitutione chemica) ipsi proportionalis esse assumatur, quæ ibidem locum obtinet densitati, merito omnino inde suspicari licet, ex eadem prorsus lege caloris undecunque radiantis fieri absorptionem, et inde consequentem temperaturæ elevationem. Neque tamen hoc ita dictum velim, quasi temperaturam atmosphæræ quantitati unice attribuendam censerem vel luminis, vel caloris undequaque radiantis qui absorbeatur; quippe hypothesin solummodo nequaquaquam omni probabilitate destitutam, immo plurimis omnino phænomenis, haud sane permultum discrepantibus, tantum non confirmatam, accuratiori subjiciendam examini proposui, assumendo nempe capacitatem ut ita dicam aëris atmosphærici, temperaturam utcunque assumendi ab ea discrepantem, quæ regionum fuerit cœlestium, rationem servare, illius quoddammodo multiplam, quæ capacitatis sit ipsum absorbendi lumen; quam igitur hypothesin cum sic fusius evolutum et quæ ex ea deducantur consectaria cum observatis diligentius collatum eamus, minime adeo censendi sumus geome-

tricis tantummodo indulgere positionibus, quæ, cum veræ rerum constitutioni haud raro ex diametro sint oppositæ, ipsis dijudicandis naturæ phænomenis nullum omnino adferunt usum.

## §. 37.

Cum igitur ex hypothesi egrediendo

$$\psi - \alpha : \psi(o) - \alpha = \varphi^n : \varphi(o)^n$$

et inde $\psi - \alpha = \frac{\psi(o) - \alpha}{\varphi(o)^n} \cdot \varphi^n$

exoriens adeo valor ipsius $\psi$ in æquatione (17) substitutus hanc suppeditet

$$\alpha \cdot d\varphi + (n+1) \cdot \left(\frac{\psi(o) - \alpha}{\varphi(o)^n}\right) \cdot \varphi^n \, d\varphi = -\frac{\varphi \, dx}{\tau} \quad \ldots \quad (27)$$

ex qua quidem prodibit

$$\frac{dx}{\tau} = -\frac{\alpha \cdot d\varphi}{\varphi} - (n+1)\left(\frac{\psi(o) - \alpha}{\varphi(o)^n}\right) \cdot \varphi^{n-1} \, d\varphi$$

fiet omnino per hujusce integrationem ita institutam, ut $\varphi$ evadat $= \varphi(o)$, posito $x = 0$,

$$\frac{x}{\tau} = \alpha \text{ Log. Hyp.} \left(\frac{\varphi(o)}{\varphi}\right) + \frac{n+1}{n}\left(\frac{\psi(o) - \alpha}{\varphi(o)^n}\right) \cdot (\varphi(o)^n - \varphi^n) \quad \ldots \quad (28)$$

unde profecto illico patebit convenientem hypothesi $\varphi = o$ ipsius $x$ valorem necessario statuendum esse $= \infty$, ideo-

que sic ipsam quoque atmosphæræ altitudinem assumendam esse infinitam.

Sed et, cum ex ipsa quam tractamus hypothesi,

$$\text{Logar.}\left(\frac{\Phi(o)}{\Phi}\right) = \frac{1}{n}\ \text{Logar.}\left(\frac{\psi(o) - \alpha}{\psi - \alpha}\right)$$

et

$$\frac{\Phi(o)^n - \Phi^n}{\Phi(o)^n} = \frac{\psi(o) - \psi}{\psi(o) - \alpha}$$

prodibit ex horum in æquatione (28) substitutione

$$\frac{x}{\tau} = \frac{\alpha}{n}\ \text{Log. Hyp.}\left(\frac{\psi(o) - \alpha}{\psi - \alpha}\right) + \frac{n+1}{n}\,[\psi(o) - \psi] \ldots (29)$$

Jam quod ad valorem attinet ipsius $\alpha$, erit

$$\alpha = \frac{\psi \cdot \Phi(o)^n - \psi(o) \cdot \Phi^n}{\Phi(o)^n - \Phi^n}$$

$$= \frac{\psi^{n+1} \cdot \psi(o)^n \cdot \Phi(o)^n - \psi(o)^{n+1} \cdot \psi^n \cdot \Phi^n}{\psi^n\ \psi o)^n \cdot \Phi(o)^n - \psi(o)^n \cdot \psi^n\ \Phi^n}$$

$$= \frac{\omega(o)^n \cdot \psi^{n+1} - \omega^n \cdot \psi(o)^{n+1}}{-\omega^n \cdot \psi(o)^n + \omega(o)^n \cdot \psi^n}$$

$$\frac{\omega(o)^n \cdot M^n \cdot \psi^{n+1} - \omega^n \cdot M^n \cdot \psi(o)^{n+1}}{\omega(o)^n \cdot M^n \cdot \psi^n - \omega^n \cdot M^n \cdot \psi(o)^n}$$

ubi, si brevitatis causa ponamus $M = 0^m.76$, atque, ex demonstratis in paragrapho 30, animadvertamus esse

$$\omega(o) \cdot M = b, \quad \text{et} \quad \omega \cdot M = B,$$

fiet adeo per horum substitutionem

$$\alpha = \frac{b^n \cdot \psi^{n+1} - B^n \cdot \psi(o)^{n+1}}{b^n \cdot \psi^n - B^n \cdot \psi(o)^n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

$$\psi(o) - \alpha = \frac{b^n \cdot \psi^n [\psi(o) - \psi]}{b^n \psi^n - B^n \cdot \psi(o)^n} ,$$

$$\psi - \alpha = \frac{B^n \psi(o)^n [\psi(o) - \psi]}{b^n \psi^n - B^n \cdot \psi(o)^n} ,$$

$$\frac{\psi(o) - \alpha}{\psi - \alpha} = \left\{ \frac{b\psi}{B \cdot \psi(o)} \right\}^n ,$$

atque sic denique per æquationem (29)

$$\frac{x}{\tau} = \alpha \cdot \text{Log. Hyp.} \left( \frac{b\psi}{B \cdot \psi(o)} \right) + \frac{n+1}{n} [\psi(o) - \psi] \quad \ldots \quad (31)$$

## §. 38.

Quæ huc usque tractata sunt, nihilo demonstratu difficiliora ex eo facta sunt, quod exponentem summa, qua fieri potuit, universalitate consideraverimus, ideoque eumdem uniuscujusque determinandum reliquimus arbitrio, donec ad ipsam descenderemus formulam universalem cum datis observationibus conferendam, ubi, cum inter omnes, quos pro hoc exponente suspicari possumus valores, unitas certe se præ cæteris a majore quadam commendat probabilitate, atque proinde si adhibeatur, fiet

$$\alpha = \frac{b\psi^2 - B.\psi(o)^2}{b\psi - B.\psi(o)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

$$x.a = \alpha\tau.a.\text{Logar. Hyp.}\left(\frac{b\psi}{B.\psi(o)}\right) + 2\tau a[\psi(o) - \psi] \ldots (33)$$

atque hæc denique si ad. G. Lussacii observationem accommodentur, sequens prodibit computationum instituendarum diagramma

$b = 0^m.7628261$ $\qquad$ $B = 0^m.3299572$

$t(o) = +\ 30°.8$ $\qquad$ $t = -\ 9°.5$

$\psi(o) = 1.0751807$ $\qquad$ $\psi = 0.9295180$

$\psi(o) - \psi = 0.1456627$ $\qquad$ $2[\psi(o) - \psi] = 0.2913254$

| | | |
|---|---|---|
| Log. $\psi$ . . . . . | 9.9682579 | |
| Log. $b$ . . . . . | 9.8824256 | |
| Log. $\psi^2$ . . . . . | 9.9365158 | |
| Log. $b\psi^2$ . . . . . | 9.8189414 | $0^m.6590850$ |
| Log. $b\psi$ . . . . . | 9.8506835 | $0^m.7090608$ |
| Log. $\psi(o)$ . . . . . | 0.0314815 | |
| Log. $B$ . . . . . | 9.5184576 | |
| Log. $\psi(o)^2$ . . . . . | 0.0629630 | |
| Log. $B.\psi(o)^2$ . . . . | 9.5814206 | $0^m.3814351$ |
| Log. $B.\psi(o)$ . . . . | 9.5499391 | $0^m.3547637$ |

$b.\psi^2 - B.\psi(o)^2 = 0^m.2776499$, $\quad b\psi - B.\psi(o) = 0^m.2542971$,

Logar. $[b\psi^2 - B.\psi(o)^2] = 9.4434975$

Logar. $[b\psi - B.\psi(o)] = 9.5493676$

$\alpha = 0.7836640$. . . . . $9.8941299$

Log. $b\psi$ — Log. $B.\psi(o)$ . . . . . $= 0.3007444$

| | | |
|---|---|---|
| Log. $\alpha$ . . . . . | 9.8941299 | |
| Log. $\tau\alpha$ . . . . . | 3.9169124 | |
| Log. [Log. $b\psi$ — Log. $B\psi(o)$] | 9.4781976 | |
| Logar. Modul. . . . . | 0.3622157 | |
| | 3.6514556 . . . . . | $4481^m.832$ |
| Log. $2[\psi(o) - \psi]$ . . | 9.4643783 | |
| Log. $\tau a$ . . . . . | 3.9169124 | |
| | 3.3812907 . . . . . | $2405^m.973$ |
| | $x.a =$ | $6887^m.805$ |

Huc accedunt $25^m.602$ a decremento gravitatis oriundæ, ideoque vera tandem prodit altitudo $= 6913^m.407$; quæ proinde cum in hypothesi ejusdem per universam atmosphæram temperaturæ tantum $= 6963^m.22$ inventa fuerit, patebit adeo correctionem utique ab emendata temperaturæ hypothesi futuram denique $= -49^m.815$.

Sed et ex altero formulæ universalis termino

$$\frac{n+1}{n} \cdot \tau a [\psi(o) - \psi]$$

integrum omnino ferre licet judicium, quo jure, quave injuria exponentem $n$ statuerimus $= 1$. Quippe, si e contrario assumeretur $n = 2$, vel

$$\psi - \alpha : \psi(o) - \alpha = \varphi^2 : \varphi(o)^2 ,$$

prodiret scilicet sic

$$\frac{n+1}{n} \cdot \tau a [\psi(o) - \psi] = 1804^m.480,$$

et inde $x \cdot a = 6286^m.312$;

si autem $n$ assumeretur $= \frac{1}{2}$, vel

$$\psi - \alpha : \psi(o) - \alpha = V\varphi : V\varphi(o)$$

prodiret similiter omnino

$$\frac{n+1}{n} [\psi(o) - \psi] \cdot \tau\alpha = 3608.961,$$

et inde $x \cdot a = 8090^m.793$

quarum summarum utraque profecto immane quantum ab ea discrepat formula, quam proxime saltem veram esse omnes confirmarunt, quas quidem instituere simul licuit determinationes geometricæ.

## §. 39.

Equidem nostri quamvis non sit instituti, ut omnia ad summum usque rigorem persequamur, quæ altitudines spectant atmosphæricas ex observationibus Barometricis determinandas, neque omnino, nisi pro arctiori admodum, quo cum theoria refractionum cohæreant vinculo, eadem heic consideravimus; interim tamen ne ab isthac quidem re alienum videatur obiter tantum, et quasi in transcursu

animadvertisse quantum in ipsis etiam formulis hypsometricis accuratior quodammodo efficere valeat temperaturæ consideratio, præsertim ubi de altitudinibus agatur, quæ ad G. Lussacii altitudinem vel propioribus quibusdam accedant rationibus, vel eandem omnino superent. Ne autem ex hac notatione aliquis suspicetur me sic existimare formulam (22. 2.) prorsus esse rejiciendam, monuisse hoc loco juvabit, isthanc ipsam non tantum insigniter se præ cæteris ab ea commendare facilitate, qua in valores convertatur numericos; sed et, pro mediocribus, sive inter libellas sive temperaturas binarum stationum differentiis, (pro quibus scilicet nullo sane discrimine liceat geometricum elasticitatum specificarum locum sive pro curva habere, qualis revera est, sive pro recta a puncto extremo ad extremum ducta) adeo sub sensus non cadere errorem, cujus equidem sic subimus periculum, ut intra limites cadat eorum, a quibus nos numquam sane tutos esse ipsæ sinunt observationes. Jam vero quod ad aëro-nauticum G. Lussacii attinet follem, pro quo scilicet temperatura superioris ab inferiore statione gradibus distabat 40°.3 ex thermometro centesimali, meræ omnino sufficiunt rationes geometricæ ad suspicionem movendam, nequaquam fore ut hypothesis sive constantis, sive decrescentis in progressio-

ne Arithmetica elasticitatis specificæ, vel illis satisfaciat rationibus, quas ab ipsis præsumere fas est observationibus. Idem prorsus de summis Alpium tenendum est verticibus, quales sunt *Chimboraço*, *Pico de Teneriffa*, *Mont Blanc*, *Cotopaxi*, *Himalaya*, etc.; atque cum omnis profecto Analogia, Mathematicæ innixa de propagatione caloris theoriæ, ipsisque abunde confirmata experimentis, hypothesi faveat, qua temperatura magis magisque lente statuatur decrescere, prout ipsæ crescunt in atmosphæra altitudines, fieri certe non potest, quin medium, quod hypothesi conveniat temperaturæ uniformiter decrescentis, eo ipso quod revera locum habuerit medio aliquantulum majus sit proditurum, ex quo adeo justo major obtinebitur determinandæ altitudinis valor, atque sic necessitas omnino patebit veram atmosphæræ constitutionem hic quoque paulo diligentius considerasse.

## §. 40.

Sed et cum temperatura regionum cœlestium non differat ab illa, quæ limiti conveniat elasticitatum specificarum, quem in antecedentibus littera designavimus $\alpha = 0.7836640$, determinabitur illa ex hac æquatione

$$\frac{800 + 3t'}{830} = \alpha = 0.7836640$$

quæ quidem dabit

$$t' = -49^{\circ}.853.$$

Cæterum, ne ullum ambiguo relinquamus locum, qua ratione hæc eadem determinanda sit temperatura, nequaquam sufficit de scala tantum convenisse sive centesimali, sive octogesimali, sive alia qualibet inter glaciem liquantem et aquam ebullientem adhibenda; sed et de ipsa illa materia ex cujus dilatationibus omnes demum metiri oportet temperaturæ gradus, et quidem huic instituto ejusmodi cæteris præferenda est materia, quæ, cum sensibiliter admodum vel minimis afficiatur temperaturæ variationibus, tum nullam ipsa, vel a maximis quas etiammum experiri licuit, subire comperta est, nisi voluminis alterationem. Talia se fluida præstant aëriformia, quæ quidem constanter permanent elastica, atque sic utcunque de principio sentiamus caloris, certe de eo suspicandum est, vel absolute, vel saltem proxime, pariter omnino cum ipso crescere volumen quodlibet aëris atmosphærici, quod datam sustineat pressionem. Equidem isthanc etiam hydrargyri esse proprietatem, pro omnibus quidem aquæ stillantis temperaturis, jamdudum multiplici experimentorum apparatu demonstraverunt Deluc et Crawford; at, cum decrescentibus infra — 40° temperaturis, in corpus hoc abeat solidum, crescentibus autem ultra + 350° in fluidum aëriforme, facile omnino suspica-

ri licet, eandem nequaquam obtinere dilatationis legem pro toto illo, quod intra hos limites comprehendatur, spatio. Idem etiam ipsum observationes meteorologicæ pro regionibus admodum borealibus confirmant, quippe cum *Torneæ* haud raro observatum fuerit thermometrum mercurii usque ad — 60° et ulterius adhuc descendisse, dum intermedios quoslibet nequaquam observare contigit gradus. Est hoc manifeste indicio, Mercurium vehementer admodum, et quasi per saltum se contrahere, ubi a fluida abit in novam atque solidam aggregationis formam; ideoque non amplius esse idoneum cujus contractionibus temperaturæ ex eadem scala dijudicentur, atque pro statu fluido. Sed et mercurio etiamnum manente fluido de convenientia hujusce scalæ propius ab utroque liquiditatis limite multum sane est dubitandum; ideoque, ut omne prorsus removeretur dubium, integram adeo thermometri mercurialis scalam, cum ea quæ aëre fit, conferendam judicarunt Dulong et Petit, neque intra limites — 36°, et + 100° ullam omnino has inter invenerunt discrepantiam, nisi quæ tota quanta erroribus tribuatur in experiendo haud quaquam evitandis. Sed et aliud majus ex hac comparatione enatum est commodum, quod scilicet sic temperaturis, quæ infra ipsum mercurii congelationis punctum observa-

tæ fuerint, thermometro determinandis quod ex aëre fiat, has ipsas semper liceat ad eandem cum mediis atmosphæræ temperaturis revocare mensuram, cum profecto nisi ex hujusmodi thermometro nullum omnino ferre liceret judicium de temperatura usque ad — 49°.853 depressa.

Cæterum minoris omnino quantumvis ipse faciam valorem illum numericum, quem in antecedentibus pro temperaturis regionum cœlestium obtinui, fieri tamen non potuit, quin insigniter mihi volupe fuerit mirum quemdam inter hanc atque Fourieri determinationem animadvertere consensum; atque profecto quanto magis hæ ambæ diversis innitantur principiis, tanto etiam magis sibimet invicem censendæ sunt mutuo futuræ firmamento. Nihilo tamen minus ne sic quidem silentio prætereundum unum esse censui maximi momenti, quod contra hanc determinationem moveri possit dubium, illud scilicet quod a temperatura desumatur intra circulum polarem aliquando observata $= -60°$, et infra; quippe cum vero simile admodum sit hanc ipsam regionum cœlestium temperaturam, utpote asymptoton ejus quæ pro atmosphæra aliquando locum habere possit, uno saltem alterove gradu hac eadem esse inferiorem. Sed et huic ut obviam quodammodo eamus dubio, animadvertendum scilicet est, eorum saltem qui, me

audiente, immodici adeo frigoris a se observati mentionem fecerunt, omnes a mercurio tantum adhibuisse thermometra, pro quibus igitur probabile admodum est notatam adeo ex mercurii contractione temperaturam, nequaquam ab ea abhorrere, quæ ex aëris contractione forsitan notata fuisset $= -45°$, vel ab hac parum diversa. Tandem monuisse juvet, nequaquam omni probabilitate destitui, ipsum quod in confinio circuli polaris locum habere possit frigoris maximum, parum admodum ab eo differre, quod spatiis conveniat æthereis.

## §. 41.

Ut velocitatem obtineamus, qua temperatura, pro crescentibus supra libellam maris altitudinibus, continuo decrescit, prodibit ex æquatione (29) per differentiationem

$$\frac{dx}{\tau} = -\frac{\alpha \cdot d\psi}{\psi - \alpha} - 2\,d\psi$$

$$= -\left(\frac{2\psi - \alpha}{\psi - \alpha}\right) d\psi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

ubi cum per demonstrata in antecedentibus

$$\psi = \frac{800 + 3t}{830}, \qquad d\psi = \frac{3\,dt}{830}$$

$$\alpha = \frac{800 - 149.559}{830} = \frac{650.441}{830}$$

$$\psi - \alpha = \frac{149.559 + 3t}{830}$$

$$2\psi - \alpha = \frac{949.559 + 6t}{830} \qquad \text{atque}$$

$$\frac{2\psi - \alpha}{\psi - \alpha} = \frac{949.559 + 6t}{149.559 + 3t}$$

fiet adeo per substitutionem

$$\frac{dx}{\tau} = -\frac{dt}{830} \cdot \frac{949.559 + 6t}{49.853 + t}$$

atque sic tandem

$$\frac{a\,dx}{dt} = -\frac{\tau a}{830} \cdot \frac{949.559 + 6t}{49.853 + t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

ex quo igitur patet velocitatem, qua temperaturæ ascendendo in atmosphæra decrescunt ab ipsis variare temperaturis, et quidem, si ponamus temperaturum $= + 10°$, fore altitudinem, quæ decremento conveniat unius gradus, $= 167^m.834$

Jam quod ad ipsa illa attinet data, ex quibus numericum ipsius $\alpha$ valorem potissimum deducamus oportet, rem equidem perfunctorie tantum considerando, determinationes quælibet quantitatum $b$, $\psi(o)$, $B$ et $\psi$ promiscue omnino videntur adhibendæ, modo majoribus aliquantum altitudinum conveniant differentiis; tum vero præcipua quæ-

dam fides illis adhibenda videtur determinationibus, quæ ab observationibus petantur ad summos Alpium intra zonam torridam sitarum vertices, quippe pro quibus minimum omnino sit periculi à variationibus atmosphæræ, quæ tanto arctioribus contin cantur oscillationum limitibus, quanto fuerint minus a linea æquinoctiali remotæ; at omnia, quæ huc quodammodo faciunt, si paulo attentius consideremus, primum utique animadvertendum occurrit, quo magis fuerint pellucida, quæ a radiis solaribus permeentur media, eo etiam minus eadem ab ipsis immediate concipere calorem, neque adeo hos insigniter quidquam valere ad temperaturam atmosphæræ elevandam, nisi ex quo, solidam offendendo telluris superficiem, hanc eandem calefecerint, ipsaque illa ambienti suum atmosphæræ communicaverit calorem. Maximum igitur hinc suspicari licet discrimen inter eam atmosphæræ temperaturam, quæ ad verticem montis utcunque prælti locum obtineat, et eam, quæ puncto conveniat ad eandem omnino sumendo supra superficiem telluris altitudinem, sed quod nulli penitus conterminum sit loco editiori, qui temperaturæ quodammodo posset inducere alterationem; atque cum profecto trajectoria, quam radius quilibet luminis a primo ipsius atmosphæræ limite ad oculum usque observatoris describit, non nisi

geometricus sit punctorum locus, ab objectis calorem adeo repercutientibus longius dissitorum, hujusmodi potissimum consideranda esse judicavi puncta, atque a convenientibus hujusmodi cuilibet puncto observationibus ea potissimum assumenda esse data, ex quibus valorem ipsius $\alpha$ deducamus. Tum vero exiguam admodum ejusmodi esse observationum copiam, multo sane maxime est dolendum, quippe cum, præter eam, quam G. Lussacio debemus, nulla omnino huic ipsi, maximi adeo ponderis, satisfaciat requisito. Utcunque autem isthac laboremus observationum penuria, quæ omnem excludit cum affinibus comparationem, unicæ tamen huic potius auctor essem ut acquiesceremus, quam ut manifesto fallaces adhiberemus, quæ ut vel optime in unum prorsus conspirarent, suspicionem tamen constantis cujusdam, quibus omnes afficerentur erroris, nequaquam tollerent.

## §. 42.

Hisce vero jam adeo præmissis de lege qua temperaturæ, in atmosphæra ascendendo, decrescunt, eaque asymptoto ad quam vergunt temperaturam regionum æthereārum, reliquum est, ut et eam eruamus explicitam ipsius $x$ functionem, quæ indefinitum exhibet densitatis $\varphi$ valorem;

quod ut efficiamus, ponamus in æquatione (28), $n = 1$, quo quidem fiet

$$\frac{x}{\tau} = \alpha \,.\, \text{Log. Hyp.}\left(\frac{\varphi(o)}{\varphi}\right) + 2[\psi(o) - \alpha]\cdot\left(1 - \frac{\varphi}{\varphi(o)}\right) \ldots (36)$$

et inde scilicet

$$\text{Log. Hyp.}\left(\frac{\varphi}{\varphi(o)}\right) + 2\left(\frac{\psi(o) - \alpha}{\alpha}\right)\cdot\frac{\varphi}{\varphi(o)} = 2\left(\frac{\psi(o) - \alpha}{\alpha}\right) - \frac{x}{\tau\alpha},$$

vel denique, si brevitatis causa statuamus

$$\frac{\varphi}{\varphi(o)} = u, \quad 2\left(\frac{\psi(o) - \alpha}{\alpha}\right) = m, \text{ et } \frac{1}{\tau\alpha} = n,$$

$$mu + \text{Logar. Hyperb. } u = m - nx$$

atque sic tandem

$$u \,.\, e^{mu} = e^{m - nx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

unde profecto patebit, si valorem ipsius $u$ functione definire velimus explicita ipsius $x$, assumi adeo posse

$$u = e^{-Ax}\,.\,(1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{&c.}),$$

et quidem coëfficientes $B, C, D$. etc. ita determinari, ut ad arbitrium sumto cuilibet conveniant ipsius $A$ valori; quippe cum ex æquatione (37) per differentiationem obtineatur

$$(1 + mu) . du = - nu . dx ,$$
$$(1 + mu) . d^2 u + m du^2 = - n dx . du ,$$
$$(1 + mu) . d^3 u + 3 m du . d^2 u = - n dx d^2 u ;$$

atque si ponamus

$$u = e^{-Ax} . v , \qquad v = e^{Ax} . u ,$$
$$dv = e^{Ax}(du + Au . dx) ,$$
$$d^2 v = e^{Ax}(d^2 u + 2A dx du + A^2 u dx^2) ,$$
$$d^3 v = e^{Ax}(d^3 u + 3A dx d^2 u + 3A^2 dx^2 du + A^3 u dx^3),$$

ex quibus proinde si $U$ et $V$ valores exhibere ponantur ipsorum $u$ et $v$, qui valori conveniunt $x = 0$, prodibit scilicet

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) = - \frac{n}{1+m} , \qquad \left(\frac{d^2 U}{dx^2}\right) = \frac{n^2}{(1+m)3}$$
$$\left(\frac{d^3 U}{dx^3}\right) = - \frac{n^3(1-2m)}{(1+m)^5} , \qquad \left(\frac{dV}{dx}\right) = A - \frac{n}{1+m} = B ,$$
$$\left(\frac{d^2 V}{dx^2}\right) = A^2 - \frac{2nA}{1+m} + \frac{n^2}{(1+m)^3} = 2C ,$$
$$\left(\frac{d^3 V}{dx^3}\right) = A^3 - \frac{3nA^2}{1+m} + \frac{3n^2 A}{(1+m)^3} - \frac{n^3(1-2m)}{(1+m)^5} = 6D.$$

## §. 43.

Coëfficientem $A$ summa huc usque universalitate consideravimus, quod quemcunque ipsi tribuamus valorem, num-

quam sane non licebit factorem determinare $v$, illius ipsius quam modo assumsimus formæ, et qui dato conveniat $A$. Ideoque cum sic nullus se præ cæteris commendet valor, quamdiu de forma tantum agitur ipsius $v$ generatim considerata, licebit utique hunc quibuslibet aptare usibus, qui inde vel in formulis universalibus eruendis, vel in computationibus numericis instituendis utcunque possint redundare. Tum vero, cum fieri nequaquam possit, ut $\varphi$ functione exhibeatur explicita atque finita ipsius $x$, neque huic obviam ire liceat difficultati, nisi factorem $v$ in seriem conjiciendo eo citius convergentem, quo minor fuerit $x$, hæc autem series profecto tanto fiat expeditior, quanto minores evadant primorum ejusdem terminorum coëfficientes, patebit utique insigne adeo, pro refractionibus, quæ inde consequentur, eruendis, enaturum esse commodum, si coëfficientem $A$ ita determinare valeamus, ut reliquorum $B$, $C$, $D$ &c., unus vel alter inde in nihilum abeat; quod cum vel ipso $B$, vel $C$, vel $D$ evanescente fieri possit, ponamus adeo

$$C = 0,$$

quo ipso fiet per demonstrata modo

$$A^2 - \frac{2nA}{1+m} + \frac{n^2}{(1+m)^3} = 0$$

et inde per resolutionem hujusce æquationis

$$A = \frac{n}{1+m} + \frac{n}{1+m}\sqrt{\frac{m}{1+m}} \quad . \; . \; . \quad (38.1)$$

atque sic quidem

$$B = A - \frac{n}{1+m} = \frac{n}{1+m}\sqrt{\frac{m}{1+m}} \; . \; (38.2)$$

$$\text{et} \quad 6D = A^3 - \frac{3nA^2}{1+m} + \frac{3n^2A}{(1+m)^3} - \frac{n^3(1-2m)}{(1+m)^5}$$

$$= B^3 - \frac{3mn^2B}{(1+m)^3} + \frac{(1-2m)mn^3}{(1+m)^5}$$

$$= \frac{mn^3}{(1+m)^5}\cdot\left(1 - 2m - \sqrt{4m(1+m)}\right) \; . \; (38.3)$$

ideoque, cum sit

$$n\tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0.783664} = 1.276057$$

$$m = \frac{2(\psi(o) - \alpha)}{\alpha}, \qquad \text{et} \quad 1 + m = \frac{2\psi(o) - \alpha}{\alpha}$$

fiet adeo in hypothesi $\psi(o) = 1$,

$$A\tau = 0.8221413 + 0.4903477$$

$$= 1.3124890 = \frac{1}{0.7619110}, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (38.4)$$

$$B\tau = 0.4903477 = \frac{1}{2.039369}, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (38.5)$$

et $$D\tau^3 = -\,0.04151087 = -\,\frac{1}{24.09008} \quad . \; . \; . \quad (38.6)$$

Simili omnino ratione ipsum etiam $B$ liceret nihilo æqualem statuere, atque sic quidem prodiret

$$A = \frac{n}{1+n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39.1)$$

$$C = -\,\frac{mn^2}{2(1+m)^3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39.2)$$

et $$D = -\,\frac{mn^3(2m-1)}{6(1+m)^5} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (39.3)$$

ideoque pro hypothesi $\psi(o) = 1$,

$$A\tau = 0.8221413 = \frac{1}{1.216336}\,, \quad . \; . \quad (39.4)$$

$$C\tau^2 = -\,0.1202177 = -\,\frac{1}{8.318244} \quad . \; . \quad (39.5)$$

et $$D\tau^3 = -\,0.002212357 = -\,\frac{1}{452.0068} \quad . \; . \quad (39.6)$$

Tandem, si ipsum $D$ pro evanescente habeamus, fiet per demonstrata in antecedentibus

$$B^3 - \frac{3mn^2B}{(1+m)^3} - \frac{(2m-1)n^3m}{(1+m)^5} = 0\,,$$

ideoque in hypothesi $\psi(o) = 1$,

$$(B\tau)^3 - 0.7213059\,(B\tau) - 0.01327414 = 0$$

quæ quidem æquatio cum unum tantum suppeditet pro $B\tau$ valorem realem, patebit adeo fore

$$B\tau = 0.8583535 = \frac{1}{1.165021} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40.1)$$

$$A\tau = 1.6804948 = \frac{1}{0.5950627} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40.2)$$

$$\text{et} \quad C\tau^2 = 0.2481678 = \frac{1}{4.029532} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40.3)$$

## §. 44.

Quæ in antecedentibus allata sunt, sive ad congruentiam quodammodo commonstrandam hypotheseos

$$\varphi = \varphi(o) \,.\, [1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.] \,.\, e^{-Ax}$$

cum ea, qua temperaturam atmosphæræ ubiquaque determinari assumsimus lege, sive ad subsidia comparanda, quibus numericos refractionum huic eidem hypothesi convenientium valores determinare liceat, aperte ostendunt factorem $v$, statuendo scilicet

$$\varphi = \varphi(o) \,.\, e^{-Ax} \,.\, v,$$

rationibus tantum proximis finita qualibet exhiberi posse algebraica ipsius $x$ functione. Tum vero, quotcunque ejusdem consideremus terminos, cum profecto maxime referat adhibendorum adeo coëfficientes $A$, $B$, $C$, $D$ &c., ita de-

terminare, ut, cum observatæ ad superficiem telluris, tum determinatæ in antecedentibus spatiorum cœlestium, absolute satisfaciant temperaturæ, ponamus adeo

$$\varphi = \varphi(o) \cdot [1 + Bx + Cx^2 + Dx^3] \cdot e^{-Ax} \; ;$$

atque prodibit ex hac per integrationem ita institutam ut evanescat integrale, posito $x = o$,

$$\int \varphi \, dx = \frac{A^3 + A^2 B + 2AC + 6D}{A^4} \cdot \varphi(o)$$

$$- \frac{e^{-Ax}}{A^4} \left\{ \begin{array}{l} A^3 + A^2 B + 2AC + 6D \\ + (A^3 B + 2A^2 C + 6AD)x \\ + (A^3 C + 3A^2 D)x^2 + A^3 D x^3 \end{array} \right\} \cdot \varphi(o)$$

Sed et, quæcunque ipsius $x$ functiones fuerint $\psi$ et $\varphi$, patebit utique ex æquatione (17) hoc idem integrale futurum

$$= [\psi(o) \cdot \varphi(o) - \psi \cdot \varphi] \cdot \tau \; ;$$

Igitur, si $x$ ponatur $= \infty$, quo quidem ipso

$$\psi = \alpha, \quad \text{et} \quad \varphi = 0, \quad \text{fiet adeo}$$

$$\tau \cdot \varphi(o) \cdot \psi(o) = \frac{A^3 + A^2 B + 2AC + 6D}{A^4} \cdot \varphi(o) \quad . \quad . \quad (41)$$

et $\psi \varphi \tau = \psi(o) \cdot \varphi(o) \cdot \tau - \int \varphi \, dx$, nec non

$\psi(1 + Bx + Cx^2 + Dx^3) \cdot e^{-Ax} \cdot \varphi(o) \cdot \tau$

$$= \frac{e^{-Ax}}{A^4} \begin{Bmatrix} A^3 + A^2 B + 2AC + 6D \\ + (A^3 B + 2A^2 C + 6AD) . x \\ + (A^3 C + 3A^2 D) x^2 + A^3 D x^3 \end{Bmatrix} . \varphi(o) ,$$

atque sic tandem

$$A^4 \tau (1 + Bx + Cx^2 + Dx^3) \psi$$

$$= \begin{Bmatrix} A^3 + A^2 B + 2AC + 6D \\ + (A^3 B + 2A^2 C + 6AD) x \\ + (A^3 C + 3A^2 D) x^2 + A^3 D x^3 \end{Bmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Porro, cum sit $\varphi = \varphi(o) . e^{-Ax} . v$,

fiet utique per differentiationem

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \varphi(o) . e^{-Ax} . \left(\frac{dv}{dx} - Av\right)$$

ideoque, cum per æquationem (17)

$$\tau\psi \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \tau\varphi \left(\frac{d\psi}{dx}\right) = -\varphi,$$

fiet adeo, substitutione facta,

$$\varphi(o) . e^{-Ax} \left\{ \tau\psi \left(\frac{dv}{dx}\right) - \tau\psi . Av + \tau v \left(\frac{d\psi}{dx}\right) + v \right\} = 0,$$

ideoque pro $x = 0$

$$\tau . V \left(\frac{d\Psi}{dx}\right) = \tau\psi(o) \left\{ AV - \left(\frac{dV}{dx}\right) \right\} - V$$

hoc est $\tau\left(\frac{d\Psi}{dx}\right) = \tau\psi(o).[A-B]-1$,

sed et ex æquatione (34) habebitur

$$\tau\left(\frac{d\Psi}{dx}\right) = -\left(\frac{\psi(o)-\alpha}{2\psi(o)-\alpha}\right)$$

Igitur fiet adeo per demonstrata in antecedentibus

$$A\tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0.7836640} = 1.276057,$$

$$\tau\psi(o).[A-B]-1 = -\left(\frac{\psi(o)-\alpha}{2\psi(o)-\alpha}\right),$$

et inde $B\tau = A\tau - \frac{1}{2\psi(o)-\alpha} = 2\left(\frac{\psi(o)-\alpha}{\alpha[2\psi(o)-\alpha]}\right)$ (43)

atque tandem per æquationem (41)

$$\psi(o) = \frac{!(A\tau)^3 + (A\tau)^2.B\tau + 2A\tau.C\tau^2 + 6D\tau^3}{(A\tau)^4} \quad .. \quad (44)$$

Sed et, si loco $A\tau$ et $B\tau$ valores substituantur, quos heic adeo obtinuimus, prodibit

$$(A\tau)^4.\psi(o) - (A\tau)^3 - (A\tau)^2.B\tau = \frac{[2\psi(o)-3\alpha].[\psi(o)-\alpha]}{\alpha 4[2\psi(o)-\alpha]};$$

igitur fiet tandem

$$2A\tau.C\tau^2 + 6D\tau^3 = \frac{[2\psi(o)-3\alpha].[\psi(o)-\alpha]}{\alpha^4[2\psi(o)-\alpha]}, \quad .. \quad (45)$$

atque sic quidem, si ponamus $D = 0$, erit

$$C\tau^2 = \frac{[2\psi(o) - 3\alpha] \cdot [\psi(o) - \alpha]}{2\alpha^3 [2\psi(o) - \alpha]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

si autem ponamus $C = 0$, erit

$$D\tau^3 = \frac{[2\psi(o) - 3\alpha]\ [\psi(o) - \alpha]}{6\alpha^4 [2\psi(o) - \alpha]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

## §. 45.

Jam, utcunque ad superficiem telluris atmosphæræ temperaturam, et, quæ ex hac pendet, elasticitatem specificam $\psi(o)$ variabilem esse statuamus, patebit utique ex demonstratis, coëfficientem $A$ nullis omnino variationibus esse obnoxium, dum e contrario $B$ et $C$ vel $D$ notabiliter admodum ab hac temperatura afficientur, quippe cum, ponendo scilicet

$$\alpha = 0.7831326 = \frac{650}{830} \text{ *)}, \qquad \text{prodeat adeo}$$

$$\psi(o) - \alpha = \frac{150 + 3t}{830}, \quad 2\psi(o) - \alpha = \frac{950 + 6t}{830},$$

et $$2\psi(o) - 3\alpha = -\left(\frac{350 - 6t}{830}\right),$$

unde per substitutionem obtinebitur

$$B\tau = 2.553846 \left(\frac{150 + 3t}{950 + 6t}\right),$$

$$C\tau^2 = -\,1.04103228\,\frac{(150 + 3t)\,(350 - 6t)}{830\,(960 + 6t)}\,,$$

et $$D\tau^3 = -\,0.4431060\,\frac{(150 + 3t)\,(350 - 6t)^2}{830\,(950 + 6t)}\,,$$

atque sic tandem pro his eisdem valoribus sequentes conficere licuit tabulas, quibus denique ipsis tabulam ex formula (35) adjunximus, pro altitudine $a\left(\frac{dx}{dt}\right)$, ad quam in atmosphæra est ascendendum, quo ex data qualibet temperatura ad aliam perveniatur, uno gradu thermometri centesimalis inferiorem

## *TABULA pro valoribus* $B_\tau$

| $+t^\circ$ | $B\tau$ | $-t^\circ$ | $B\tau$ |
|---|---|---|---|
| 30° | 0.5124079 | 0° | 0.4032381 |
| 29 | 0.5384890 | 1 | 0.3977774 |
| 28 | 0.5345259 | 2 | 0.3920617 |
| 27 | 0.5305201 | 3 | 0.3863668 |
| 26 | 0.5264710 | 4 | 0.3805947 |
| 25 | 0 5223777 | 5 | 0 3747405 |
| 24 | 0.5182392 | 6 | 0.3688267 |
| 23 | 0.5140554 | 7 | 0.3628262 |
| 22 | 0.5098249 | 8 | 0.3567457 |
| 21 | 0.5055476 | 9 | 0.3505838 |
| 20 | 0.5012221 | 10 | 0.3443388 |
| 19 | 0.4968477 | 11 | 0.3380091 |
| 18 | 0.4924240 | 12 | 0.3315928 |
| 17 | 0.4879498 | 13 | 0.3250882 |
| 16 | 0.4834240 | 14 | 0.3184935 |
| 15 | 0.4788461 | 15 | 0.3118067 |
| 14 | 0.4741059 | 16 | 0.3050261 |
| 13 | 0.4695301 | 17 | 0.2981495 |
| 12 | 0.4647899 | 18 | 0.2911748 |
| 11 | 0.4599939 | 19 | 0.2841001 |
| 10 | 0.4551409 | 20 | 0.2769231 |
| 9 | 0.4502288 | 21 | 0.2696415 |
| 8 | 0.4452588 | 22 | 0.2622531 |
| 7 | 0.4402295 | 23 | 0.2547555 |
| 6 | 0.4351381 | 24 | 0.2471464 |
| 5 | 0.4299842 | 25 | 0.2394231 |
| 4 | 0.4247670 | 26 | 0.2315831 |
| 3 | 0.4194841 | 27 | 0.2236236 |
| 2 | 0.4141371 | 28 | 0.2155420 |
| 1 | 0.4087222 | 29 | 0.2073355 |
| 0 | 0.4032381 | 30 | 0.1990010 |

## *TABULA pro valoribus* $C\tau^2$

| $t^\circ +$ | $C\tau^2 = -$ |
|---|---|
| 30° | 0.0452864 |
| 29 | 0.0465458 |
| 28 | 0.0477784 |
| 27 | 0.0489837 |
| 26 | 0.0501612 |
| 25 | 0.0513105 |
| 24 | 0.0524311 |
| 23 | 0.0535226 |
| 22 | 0.0545844 |
| 21 | 0.0556162 |
| 20 | 0.0566173 |
| 19 | 0.0575773 |
| 18 | 0.0585256 |
| 17 | 0.0594317 |
| 16 | 0.0603050 |
| 15 | 0.0611450 |
| 14 | 0.0619510 |
| 13 | 0.0627225 |
| 12 | 0.0634590 |
| 11 | 0.0641596 |
| 10 | 0.0648239 |
| 9 | 0.0654511 |
| 8 | 0.0660407 |
| 7 | 0.0665919 |
| 6 | 0.0671040 |
| 5 | 0.0675762 |
| 4 | 0.0680080 |
| 3 | 0.0683984 |
| 2 | 0 0687468 |
| 1 | 0.0690523 |
| 0 | 0.0693141 |

| $t^\circ -$ | $C\tau^2 = -$ |
|---|---|
| 0° | 0.0693141 |
| 1 | 0.0695314 |
| 2 | 0.0697035 |
| 3 | 0.0698292 |
| 4 | 0.0699078 |
| 5 | 0.0699384 |
| 6 | 0.0699200 |
| 7 | 0.0698215 |
| 8 | 0.0697322 |
| 9 | 0.0695608 |
| 10 | 0.0693364 |
| 11 | 0.0690578 |
| 12 | 0.0687241 |
| 13 | 0.0683339 |
| 14 | 0.0679019 |
| 15 | 0.0673798 |
| 16 | 0.0668133 |
| 17 | 0.0661857 |
| 18 | 0.0654954 |
| 19 | 0.0647412 |
| 20 | 0.0639217 |
| 21 | 0.0630355 |
| 22 | 0.0620811 |
| 23 | 0.0610569 |
| 24 | 0.0599615 |
| 25 | 0 0587932 |
| 26 | 0.0575504 |
| 27 | 0.0562314 |
| 28 | 0.0548344 |
| 29 | 0.0533576 |
| 30 | 0.0517991 |

## *TABULA pro valoribus* $D_\tau{}^3$

| $t+$ | $D\tau^3 = -$ | $t-$ | $D\tau^3 = -$ |
|---|---|---|---|
| 30° | 0.0192758 | 0° | 0.0295029 |
| 29 | 0.0198118 | 1 | 0.0295954 |
| 28 | 0.0203364 | 2 | 0.0296687 |
| 27 | 0.0208495 | 3 | 0.0297232 |
| 26 | 0.0213507 | 4 | 0.0297556 |
| 25 | 0.0218399 | 5 | 0.0297686 |
| 24 | 0.0223168 | 6 | 0.0297608 |
| 23 | 0.0227814 | 7 | 0.0297189 |
| 22 | 0.0232334 | 8 | 0.0296809 |
| 21 | 0.0236725 | 9 | 0.0296079 |
| 20 | 0.0240982 | 10 | 0.0295124 |
| 19 | 0.0245073 | 11 | 0.0293938 |
| 18 | 0.0249109 | 12 | 0.0292585 |
| 17 | 0.0252948 | 13 | 0.0290924 |
| 16 | 0.0256683 | 14 | 0.0289018 |
| 15 | 0.0260258 | 15 | 0.0286797 |
| 14 | 0.0263699 | 16 | 0.0284385 |
| 13 | 0.0266973 | 17 | 0.0281713 |
| 12 | 0.0270108 | 18 | 0.0278775 |
| 11 | 0.0273090 | 19 | 0.0275565 |
| 10 | 0.0275917 | 20 | 0.0272077 |
| 9 | 0.0278587 | 21 | 0.0268305 |
| 8 | 0.0281096 | 22 | 0.0264243 |
| 7 | 0.0283442 | 23 | 0.0259883 |
| 6 | 0.0285622 | 24 | 0.0255221 |
| 5 | 0.0287632 | 25 | 0.0250248 |
| 4 | 0.0289470 | 26 | 0.0245523 |
| 3 | 0.0291132 | 27 | 0.0239344 |
| 2 | 0.0292615 | 28 | 0.0233398 |
| 1 | 0.0293915 | 29 | 0.0227112 |
| 0 | 0.0295029 | 30 | 0.0220478 |

## *TABULA pro valoribus* $a\left(\frac{dx}{dt}\right)$

| $t+$ | $a\left(\frac{dx}{dt}\right)=$ | $t-$ | $a\left(\frac{dx}{dt}\right)=$ |
|---|---|---|---|
| 30° | 140$^m$.547 | 0° | 189$^m$.055 |
| 29 | 141$^m$.471 | 1 | 191$^m$.695 |
| 28 | 142$^m$.620 | 2 | 194$^m$.445 |
| 27 | 143$^m$.697 | 3 | 197$^m$.312 |
| 26 | 144$^m$.802 | 4 | 200$^m$.303 |
| 25 | 145$^m$.937 | 5 | 203$^m$.427 |
| 24 | 147$^m$.103 | 6 | 206$^m$.694 |
| 23 | 148$^m$.300 | 7 | 210$^m$.597 |
| 22 | 149$^m$.530 | 8 | 213$^m$.694 |
| 21 | 150$^m$.795 | 9 | 217$^m$.450 |
| 20 | 152$^m$.097 | 10 | 221$^m$.393 |
| 19 | 153$^m$.436 | 11 | 225$^m$.539 |
| 18 | 154$^m$.814 | 12 | 229$^m$.909 |
| 17 | 156$^m$.236 | 13 | 234$^m$.503 |
| 16 | 157$^m$.696 | 14 | 239$^m$.359 |
| 15 | 159$^m$.204 | 15 | 244$^m$.492 |
| 14 | 160$^m$.759 | 16 | 249$^m$.927 |
| 13 | 162$^m$.363 | 17 | 255$^m$.691 |
| 12 | 164$^m$.019 | 18 | 261$^m$.816 |
| 11 | 165$^m$.729 | 19 | 268$^m$.336 |
| 10 | 167$^m$.496 | 20 | 275$^m$.291 |
| 9 | 169$^m$.323 | 21 | 282$^m$.725 |
| 8 | 171$^m$.213 | 22 | 290$^m$.690 |
| 7 | 173 .169 | 23 | 299$^m$.245 |
| 6 | 175 .196 | 24 | 308$^m$.459 |
| 5 | 177 .296 | 25 | 318$^m$.408 |
| 4 | 179 .473 | 26 | 329$^m$.188 |
| 3 | 181 .733 | 27 | 340$^m$.904 |
| 2 | 184 .080 | 28 | 353$^m$.686 |
| 1 | 186 .519 | 29 | 367$^m$.686 |
| 0 | 189 .055 | 30 | 383$^m$.085 |

§. 46.

Ex variis omnino, quas pro temperaturæ, ex crescentibus in atmosphæra altitudinibus, decrementis comminisci quilibet possit, hypothesibus, insigniter præ cæteris ea se simplicitate commendat, qua quidem temperaturæ, et ex hac pendentis elasticitatis specificæ differentiale, differentiali statuatur proportionale intensitatis luminis solaris atmosphæram a vertice transeuntis, atque stratum penetrantis, ad altitudinem $ax$ supra libellam maris sumtum, cujus profunditas fuerit $= a \,.\, dx$. Quam igitur ut accuratius aliquantulum evolvamus hypothesin, ponamus unitatem luminis solaris exhibere eam intensitatem, quæ cessante telluris atmosphæra pro ipsis locum habeat spatiis cœlestibus, $\mu$ autem eam illius intensitatem, quæ pro puncto etiamnum valet $M$, cujus scilicet supra libellam maris altitudo sit $= a \,.\, x$.

Erit utique ex ipsa, de qua agitur hypothesi,

$$d\mu = - M \,.\, d\psi ,$$

et inde per integrationem

$$\mu = 1 - M(\psi - \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

exhibente videlicet etiamnum $\alpha$ illum ipsius $\psi$ valorem, qui regionibus convenit spatiorum cœlestium. Ideoque erit profecto ad libellam maris

$$\mu^{(o)} = 1 - M[\psi(o) - \alpha] \quad . \quad . \quad . \quad (18.1)$$

atque sic tandem

$$M = \frac{1 - \mu(o)}{\psi(o) - \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48.2)$$

Sed et, cum, per prima photometriæ principia, lumen, in strato quodam medii non absolute pellucidi trajiciendo, exstinctum rationem sequatur ex tribus compositam; cum scilicet ex ea, quæ suæ ipsius est intensitatis, tum etiam ex ea quæ densitatis est medii, atque tandem ex ea, quæ profunditatis est strati trajiciendi, fiet adeo

$$d\mu = N\mu\varphi\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49);$$

ideoque, cum sit per æquationem (17)

$$\varphi\, dx = -\tau(\psi\, d\varphi + \varphi\, d\psi) = -\tau\, d\omega$$

erit profecto

$$d\mu = -N\tau . \mu\, d\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49.1),$$

atque sic tandem

$$N\tau\, d\omega = -\frac{d\mu}{\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49.2);$$

unde per integrationem ita institutam, ut evanescat $\omega$ statuendo $\mu = 1$, prodibit scilicet

$$N\tau\omega = \text{Logar. Hyperb.} \left(\frac{1}{\mu}\right),$$

ideoque $$\mu = \varepsilon^{-N\tau\omega},$$

ex quibus denique obtinebitur

$$N\tau \,.\, \omega(o) = \text{Logar. Hyperb.} \left(\frac{1}{\mu(o)}\right),$$

$$N\tau = \frac{1}{\omega(o)} \text{ Logarithm. Hyperb.} \left(\frac{1}{\mu(o)}\right),$$

$$N\tau\omega = \frac{\omega}{\omega(o)} \text{ Logar. Hyperb.} \left(\frac{1}{\mu(o)}\right),$$

hoc est, cum profecto

$$\omega : \omega(o) = B : b,$$

$$N\tau\omega = \frac{B}{b} \text{ Logar. Hyperb.} \left(\frac{1}{\mu(o)}\right),$$

$$\text{Log. Hyperb. } e^{N\tau\omega} = \text{Log. Hyperb.} \left(\frac{1}{\mu(o)}\right)^{\frac{B}{b}},$$

atque sic denique

$$e^{-N\tau\omega} = \mu = [\mu(o)]^{\frac{B}{b}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50).$$

Quod si jam æquationem (48) multiplicemus per $\psi(o) - \alpha$, tum vero pro $M[\psi(o) - \alpha]$ illius substituamus valorem $1 - \mu(o)$, prodibit

$$\mu \cdot \psi(o) - \mu \cdot \alpha = \psi(o) - \alpha - \psi + \psi \cdot \mu(o) + \alpha - \mu(o) \cdot \alpha,$$

hoc est, reductione rite peracta,

$$[\mu - \mu(o)]\,\alpha = [1 - \mu(o)] \cdot \psi - [1 - \mu] \cdot \psi(o) \quad \ldots\ldots \quad (51)$$

## §. 47.

Jam vero, ut hæc eadem generatim adeo demonstrata ad observata etiam quodammodo applicemus, ponamus, ex

determinatione LAMBERTI p. 397 photometriæ allata, intensitatem luminis solaris, quod atmosphæram a vertice ad superficiem usque Telluris trajecerit, pro altitudine Barometri 26 pollicum Parisiensium esse $= 0.5889$, quo quidem ipso pro altitudine Barometri $B$ generatim adeo erit $= (0.4712686)^B$, atque sic pro inferiore LUSSACII statione

$= (0.4712686)^{0.7628261} = 0.5633270$, pro superiore autem

$= (0.4712686)^{0.3299572} = 0.7801760$, fiet utique

$$\mu(o) = 0.563327, \quad \text{et} \quad \mu = 0.780176$$

atque sic per substitutionem in æquatione (51)

$$0.216849\,\alpha = 0\,436673\,\psi - 0.219824\,\psi(o),$$

unde denique prodibit

$$\alpha = +\,0.7818571$$

atque sic tandem temperatura regionum cœlestium

$$= \frac{830\,\alpha - 800}{3} = -\,50°.35287$$

Mire admodum hæc cum ea congruit determinatione, quam in paragrapho 40ª exhibuimus, atque medium $-\,50°.106$ cum non nisi quantitate perexigua $0°.106$ a $-\,50°$ differat, hunc proinde numerum in sequentibus adhibuimus, atque huic convenienter assumsimus

$$\alpha = \frac{800 - 3.50}{830} = 0.7831325$$

Quod ad velocitatem attinet, qua temperatura ab elevationibus in atmosphæra decrescit, erit ex demonstratis in antecedentibus

$$N\tau\omega = -\text{ Log. Hyp. } \mu = -\text{ Log. Hyp. } [1 - M(\psi - \alpha)],$$

et inde per differentiationem

$$\frac{M\,d\psi}{1 - M(\psi - \alpha)} = N\tau\,d\omega = -N\varphi\,dx \quad ,$$

$$\frac{M\psi\,d\psi}{1 - M(\psi - \alpha)} = -N\psi\varphi\,dx = -N\omega\,dx$$

$$= -N\tau\omega\left(\frac{dx}{\tau}\right) = \frac{dx}{\tau}\text{ Log. Hyp. } \mu$$

vel denique multiplicatione utrinque facta per 830, atque loco ipsius $830\,d\psi$ substituendo $3\,dt$

$$\frac{3M\psi\,.\,dt}{1 - M(\psi - \alpha)} = 830\left(\frac{dx}{\tau}\right).\text{ Log. Hyp. } \mu$$

atque sic tandem

$$a\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{3M\psi\,.\,\tau a}{830\,\mu\,.\,\text{Log. Hyperb. } \mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

ideoque si ponamus $x = 0$,

$$\left(\frac{a\,dX}{dt}\right) = \frac{3[1 - \mu(o)]\,.\,\psi(o)\,.\,\tau a}{830\,[\psi(o) - \alpha]\,.\,\mu(o)\,.\,\text{Log. Hyp. } \mu(o)} \quad (52.1)$$

quod quidem pro normali atmosphæræ statu dabit

$$\left(\frac{a\,dX}{dt}\right) = 186^m.61$$

## §. 48.

Ex duabus, quarum in paragrapho 36 mentionem fecimus hypothesibus quibus nempe dato satisfaciamus elasticitatum specificarum limiti $\alpha$, qui datæ conveniat regionum cœlestium temperaturæ $-50°$, quam equidem a meis diversis omnino insistens principiis Fouvier egregie aliis quoque satisfacere ostendit phænomenis; superest ut et illam accuratius evolvamus, qua quidem statuatur

$$\psi = \frac{\alpha x + \delta.\psi(o)}{x + \delta}$$

$$= \alpha + \frac{\delta[\psi(o) - \alpha]}{x + \delta}$$

atque primum quidem omnium ex hac obtinebimus

$$d\psi = -\frac{\delta[\psi(o) - \alpha].dx}{(x + \delta)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

tum vero

$$dx + \tau d\psi = \frac{x^2 + 2\delta x + \delta^2 + \alpha\delta\tau - \delta\tau\psi(o)}{(x + \delta)^2},$$

atque sic scilicet per æquationem (17)

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = -\left(\frac{dx + \tau d\psi}{\tau\psi}\right)$$

$$= -\left(\frac{x^2 + 2\delta x + \delta^2 + \alpha\delta\tau - \delta\tau\psi(o)}{\tau[x+\delta][\alpha x + \delta\psi(o)]}\right) dx$$

$$= \left.\begin{array}{l} \dfrac{\delta\psi(o) - \alpha\delta - \alpha^2\tau}{\alpha\tau}\left(\dfrac{dx}{\alpha x + \delta\psi(o)}\right) \\ -\dfrac{dx}{\alpha\tau} + \dfrac{dx}{x+\delta} \end{array}\right\}$$

quod igitur, per integrationem ita institutam ut evanescat integrale sumendo $x = 0$, hanc suppeditabit æquationem

$$\text{Log. Hyp.}\left(\frac{\varphi}{\varphi(o)}\right) = -\frac{x}{\alpha\tau} + \text{Logar. Hyperb.}\left(\frac{x+\delta}{\delta}\right)$$

$$+ \frac{\delta\psi(o) - \alpha\delta - \alpha^2\tau}{\alpha^2\tau}\ \text{Log. Hyp.}\left(\frac{ax + \delta\psi(o)}{\delta\psi(o)}\right)$$

ex qua denique prodibit

$$\varphi = \varphi(o)\left(1 + \frac{x}{\delta}\right)\cdot\left(1 + \frac{\alpha x}{\delta\psi(o)}\right)^{\frac{\delta\psi(o) - \alpha\delta - \alpha^2\tau}{\alpha^2\tau}} \cdot e^{-\frac{x}{\alpha\tau}} \quad \ldots (54)$$

Quod si igitur $\frac{\delta\psi(o) - \alpha\delta - \alpha^2\tau}{\tau\alpha^2}$ integro cuilibet numero assumamus æqualem, patebit ex æquatione (55), pro

valore ipsius $\varphi$ explicitam semper atque finitam proditu-ram esse ipsius $x$ functionem, et quidem, si statuatnr

$$\frac{\delta\psi(o) - \alpha\delta - \alpha^2\tau}{\tau\alpha^2} = 2$$

futuram esse $\varphi$ functionem explicitam formæ

$$\varphi(o)\,[1 + Bx + Cx^2 + Dx^3]\,.\,e^{-Ax};$$

si autem statuatur $\frac{\delta\psi(o) - \alpha\delta - \alpha^2\tau}{\tau\alpha^2} = 1$,

fore $\varphi$ functionem formæ

$$\varphi(o)\,[1 + Bx + Cx^2]\,.\,e^{-Ax};$$

atque tandem, si statuatur $\frac{\delta\psi(o) - \alpha\delta - \alpha 2\tau}{\tau\alpha^2} = 0$,

fore $\varphi$ functionem formæ

$$\varphi(o)[1 + Bx]\,.\,e^{-Ax};$$

Rursus, cum sit profecto $dt = \frac{830\,d\psi}{3}$,

fiet adeo $a\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{3a}{830}\left(\frac{dx}{d\psi}\right)$,

ideoque per æquationem (53)

$$a\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{3a}{830}\,\frac{(x + \delta)^3}{\delta(\psi(o) - \alpha)}$$

atque sic scilicet ad libellam maris

$$a\left(\frac{dX}{dt}\right) = -\frac{3a\delta}{830[\psi(o) - \alpha]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Jam vero, si generatim omnino ponamus

$$\frac{\delta . \psi(o) - \alpha\delta - \alpha^3\tau}{\tau\alpha^2} = n,$$

quo quidem ipso fiet

$$\delta = \frac{(n + 1) . \alpha^2\tau}{\psi(o) - \alpha},$$

prodibit adeo ex formula (55)

$$a\left(\frac{dX}{dt}\right) = -\frac{3(n + 1)\alpha^2 . \tau a}{830[\psi(o) - \alpha]^2} \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

atque sic tandem pro hypothesi temperaturæ + 10° ad libellam maris

$$a\left(\frac{dX}{dt}\right) = -\ 389^m . 2578(n + 1),$$

unde profecto proditurum adeo pro valore altitudinis supra libellam maris, ex qua temperatura atmosphæræ ad statum normalem sumta, uno gradu thermometri centesimalis decrescit

$= 1167^m . 77$ sumendo $n = 2$,

$= 778^m . 52$ autem sumendo $n = 1$, atque tandem

$= 389^m . 26$ sumendo $n = 0$;

quorum igitur valorum cum primus atque secundus immane quantum ab observatis discrepent, ipse autem tertius etiam duplo saltem major est, quam ut cum his conciliari possit, patebit adeo omnes quas attulimus tres pro valore ipsius $n$ hypotheses prorsus rejiciendas esse, atque sic quoque hypothesin $\varphi = \varphi(o)\left(1 + Bx\right).e^{-Ax}$, quam Laplacius ex geometricis solummodo considerationibus exposuit, cum velocitate nequaquam congruere, qua temperatura ascendendo in atmosphæra decrescit.

Hic autem consensus quo locum habeat, sit omnino necesse est, ex æquationibus (34) et (33)

$$\frac{(x+\delta)^2}{\delta[\psi(o)-\alpha)} = \frac{\tau(2\psi-\alpha)}{\psi-\alpha},$$

ideoque ad ipsam maris libellam

$$\frac{\delta}{\psi(o)-\alpha} = \tau\left(\frac{2\psi(o)-\alpha}{\psi(o)-\alpha}\right)$$

unde denique $\delta = \tau(2\psi(o)-\alpha)$,

$$\frac{\delta\psi(o)-\alpha\delta-\alpha^2\tau}{\tau\alpha^2} = \frac{\tau[2\psi(o)-\alpha]\,[\psi(o)-\alpha]-\alpha^2\tau}{\tau\alpha^2}$$

$$= -\frac{\psi(o).[3\alpha-2\psi(v)]}{\alpha^2} \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

quod scilicet pro hypothesi $\psi(o) = 1$, dabit numerum

$n = -\ 0.5697042$,

$$\delta = 1.2168675\tau = \frac{\tau}{0.82178217},$$

$$\frac{\delta}{\alpha} = 1.5538461\tau = \frac{\tau}{0.6435644},$$

$$\varphi = \left\{1+0.6435644\left(\frac{x}{\tau}\right)\right\}^{-0.5697042} \cdot \left\{1 + 0.8217822\left(\frac{x}{\tau}\right)\right\} \cdot e^{-1.2769231\left(\frac{x}{\tau}\right)},$$

Ideoque, cum sit ex theoremate binomiali

$$\left\{1 + 0.6435644\left(\frac{x}{\tau}\right)\right\}^{-0.5697042} =$$

$$1 - 0.3666413\left(\frac{x}{\tau}\right) + 0.1851916\left(\frac{x}{\tau}\right)^2 - 0.1020881\left(\frac{x}{\tau}\right)^3 + \text{&c.}$$

fiet tandem multiplicatione peracta

$$\varphi = \left\{\begin{array}{l} 1 + 0.4551408\left(\frac{x}{\tau}\right) - 0.1161077\left(\frac{x}{\tau}\right)^2 \\ \qquad + 0.0500990\left(\frac{x}{\tau}\right)^3 + \text{&c.} \end{array}\right\} \cdot e^{-1.2769231\left(\frac{x}{\tau}\right)} \quad (58)$$

## §. 49.

Expositis autem sic copiose sane, quæ utcunque probabili refractionum sive Astronomicarum, sive Terrestrium theoriæ fundamenti loco substernantur principiis physicis,

et quidem nimii forsitan cum in illis explicandis fuerimus consectariis, quæ ex variis obtineantur circa temperaturæ in atmosphæra distributionem hypothesibus, superest ut et uno intuitu eas conspiciendas tradamus, pro densitate aëris $\varphi$ definienda, formulas, ex quibus omnes in posterum deducendi sint valores numerici; et quidem tum si statuamus

$$\varphi = \varphi(0)\left\{1 + B\left(\frac{x}{\tau}\right) + C\left(\frac{x}{\tau}\right)^2 + D\left(\frac{x}{\tau}\right)^3 + \&c.\right\}.e^{-A\left(\frac{x}{\tau}\right)}$$

semper equidem pro $A$ valor adhibendus est 1.2769231, pro reliquis autem $B$, $C$ et $D$ tria consideranda sese nobis obtulerunt valorum systemata; et quidem, si ponamus $\psi(0) = 1$, primo loco per §. 44

$B = 0.4551409$, $C = -0.0648239$, et $D = 0$,

secundo autem loco ex eadem paragrapho

$B = 0.4551409$, $C = 0$, et $D = -0.0275917$

atque tertio tandem loco ex paragrapho novissima

$B = 0.4551409$, $C = -0.1161077$, et $D = 0.0500990$

## §. 50.

Hisce vero jam ita præmissis, ad ipsum tandem nos accingamus refractionum determinandarum opus; atque tum

quidem primum utique omnium tenendum est, ex æquatione (6) esse

$$d\varrho = \frac{-\varepsilon[1+\varepsilon\,.\,\varphi(o)]\,\mathrm{Sin}\,\theta\,.\,d\varphi}{(1+\varepsilon\varphi)\sqrt{(1+x)^2\,.\,(1+\varepsilon\varphi)^2-[1+\varepsilon\varphi(o)]^2\,.\,\mathrm{Sin}\,\theta^2}}$$

$$= \frac{-\varepsilon[1+\varepsilon.\varphi(o)]\,\mathrm{Sin}\,\theta\,.\,d\varphi}{\left\{\begin{matrix}1+\varepsilon.\varphi(o)\\-\varepsilon[\varphi(o)-\varphi]\end{matrix}\right\}\sqrt{(1+x)^2.\left\{\begin{matrix}1+\varepsilon.\varphi(o)\\-\varepsilon[\varphi(o)-\varphi]\end{matrix}\right\}^2-[1+\varepsilon.\varphi(o)]^2\,.\,\mathrm{Sin}\,\theta^2}}$$

$$= \frac{\dfrac{-\varepsilon}{1+\varepsilon\,.\,\varphi(o)}\,.\,d\varphi}{\left\{1-\dfrac{\varepsilon[\varphi(o)-\varphi]}{1+\varepsilon\,.\,\varphi(o)}\right\}\sqrt{\left(\dfrac{1+x}{\mathrm{Sin}\,\theta}\right)^2\left\{1-\dfrac{\varepsilon[\varphi(o)-\varphi]}{1+\varepsilon\,.\,\varphi(o)}\right\}^2-1}}$$

ubi, si brevitatis causa statuamus

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\,.\,\varphi(o)} = \eta\,, \quad \left(\frac{1+x}{\mathrm{Sin}\,\theta}\right)^2 - 1 = H\,,$$

$$\left(\frac{1+x}{\mathrm{Sin}\,\theta}\right)^2 .\,[\varphi(o)-\varphi] = K\,, \quad \left(\frac{1+x}{\mathrm{Sin}\,\theta}\right)^2 .\,[\varphi(o)-\varphi]^2 = L\,,$$

fiet adeo per substitutionem

$$d\varrho = \frac{-\eta\,d\varphi}{[1-\eta\,.\,]\varphi(o)-\varphi]\sqrt{(H-2K\eta+L\eta^2)}} \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

vel denique evolutione facta in seriem infinitam, quæ secundum ascendentes progrediatur ipsius $\eta$ dignitates

$$d\varrho = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\eta\, d\varphi}{\sqrt{H}} - \frac{\eta^2 . d\varphi}{\sqrt{H}} \left( \varphi(o) - \varphi + \frac{K}{H} \right) \\ -\frac{\eta^3\, d\varphi}{H\sqrt{H}} \left( K[\varphi(o) - \varphi] + \frac{3K^2}{2H} - \frac{L}{2} \right) \\ -\frac{\eta^4 d\varphi}{2H\sqrt{H}} \left\{ \left( \frac{3K^2}{H} - L \right) [\varphi(o) - \varphi] + \frac{5K^3}{H^2} - 3KL \right\} \\ -\frac{\eta^5\, d\varphi}{2H\sqrt{H}} \left\{ \left( \frac{5K^3}{H^2} - 3KL \right) [\varphi(o) - \varphi] + \frac{35K^4}{4H^3} - \frac{15K^2L}{2H^2} + \frac{3L^2}{4H} \right\} \\ -\frac{\eta^6\, d\varphi}{4H^2 . \sqrt{H}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{35K^4}{2H^2} - \frac{15K^2L}{H} + \frac{3L^2}{2} \right) [\varphi(o) - \varphi] \\ + \frac{63K^5}{2H^3} - \frac{35K^3L}{H^2} + \frac{15KL^2}{2H} \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (60.1)$$

## §. 51.

Jam vero, ut hæc ad refractionem horizontalem determinandam adhibeamus, observandum omnino est esse tum

$$\text{Sin } \theta = 1, \quad \text{atque sic} \quad H = 2x + x^2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{H}} = \frac{1}{\sqrt{2x}} \left( 1 - \frac{x}{4} + \frac{1.3}{4.8} x^2 - \frac{1.3.5}{4.8.12} x^3 + \text{&c.} \right),$$

Ideoque, cum sit etiam ex hypothesi

$$\varphi = \varphi(o) \left\{ 1 + B\left(\frac{x}{\tau}\right) + C\left(\frac{x}{\tau}\right)^2 + D\left(\frac{x}{\tau}\right)^3 + \text{&c.} \right\} . e^{-A\left(\frac{x}{\tau}\right)}$$

atque sic scilicet differentiando

$$d\varphi = \varphi(o).\left\{\begin{matrix}\frac{B-A}{\tau}+\frac{2C-AB}{\tau^2}.x \\ +\frac{3D-AC}{\tau^3}x^2-\frac{AD}{\tau^4}x^3\end{matrix}\right\}.e^{-A\left(\frac{x}{\tau}\right)}dx\,,$$

fiet adeo per substitutionem

$$-\frac{\eta\,d\varphi}{\sqrt{H}} =$$

$$\varphi(o).\left\{\begin{matrix}-\frac{\eta(B-A)}{\tau\sqrt{2}.\sqrt{x}}+\frac{\eta(B-A)}{4\tau\sqrt{2}}\sqrt{x} \\ -\frac{\eta(2C-AB)}{\tau^2\sqrt{2}}\sqrt{x}+\frac{\eta(2C-AB)}{4\tau^2.\sqrt{2}}x\sqrt{x} \\ -\frac{\eta(3D-AC)}{\tau^3.\sqrt{2}}x\sqrt{x}-\frac{3\eta(B-A)}{4.8.\tau\sqrt{2}}x\sqrt{x} \\ +\frac{\eta.AD}{\tau^4\sqrt{2}}x^2\sqrt{x}+\frac{\eta(3D-AC)}{4\tau^3\sqrt{2}}x^2\sqrt{x} \\ -\frac{3\eta(2C-AB)}{4.8.\tau^2\sqrt{2}}x^2\sqrt{x}+\frac{3.5\eta(B-A)}{4.8.12\tau\sqrt{2}}x^2\sqrt{x}\end{matrix}\right\}.e^{-A\left(\frac{x}{\tau}\right)}.d\ldots\quad\ldots(61)$$

cujus igitur integratio ultimo pendet ab integratione formulæ universalis

$$e^{-\frac{x_i}{s}}x^p\sqrt{x}\,.\,dx\,;$$ atque tum quidem cum sit

$$d\left(e^{-\frac{x}{s}}\, x^p\, \sqrt{x}\right) = -\frac{1}{s} e^{-\frac{x}{s}}\, x^p\, \sqrt{x}\, .\, dx$$

$$+\frac{2p+1}{2} .\, e^{-\frac{x}{s}}\, x^{p-1}\, \sqrt{x}\, .\, dx\,,$$

et inde $\int\left(e^{-\frac{x}{s}}\, x^p\, \sqrt{x}\, .\, dx\right) = -s\, .\, e^{-\frac{x}{s}}\, x^p\, \sqrt{x}$

$$+\left(\frac{2p+1}{2}\right) s \cdot \int\left(e^{-\frac{x}{s}}\, x^{p-1}\, \sqrt{x}\, .\, dx\right),$$

$$\int e^{-\frac{x}{s}}\, \sqrt{x}\, .\, dx = -s\, .\, e^{-\frac{x}{s}}\, \sqrt{x} + \frac{s}{2}\int e^{-\frac{x}{s}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}\,,$$

$$\int e^{-\frac{x}{s}}\, x\sqrt{x}\, .\, dx = -s\, e^{-\frac{x}{s}}\left(x + \frac{3s}{2}\right)\sqrt{x} + \frac{3s^2}{4} \cdot \int e^{-\frac{x}{s}}\, \frac{dx}{\sqrt{x}}\,,$$

$$\int e^{-\frac{x}{s}}\, x^2\, \sqrt{x}\, .\, dx = -s\, e^{-\frac{x}{s}}\left(x^2 + \frac{5}{2}\, sx + \frac{5.3}{4}\, s^2\right)$$

$$+\frac{5.3}{8}\, s^3 \cdot \int e^{-\frac{x}{s}}\, \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

fiet adeo, propter evanescentem $e^{-\frac{x}{s}} x^l$ utcunque magnus fuerit numerus $l$, modo statuatur $x = \infty$,

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{s}} x^p \sqrt{x} . dx =$$

$$\frac{(2p+1)(2p-1)(2p-3)\ldots 3.1}{2^{p+1}} s^{p+1} . \int_0^\infty e^{-\frac{x}{s}} \frac{dx}{\sqrt{x}};$$

ideoque cum sit $\int_0^\infty e^{-\frac{x}{s}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{s\pi}$;

fiet adeo tandem

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{s}} x^p \sqrt{x} . dx = (2p+1)(2p-1)(2p-3)\ldots 3.1 \left(\frac{s}{2}\right)^{p+1} . \sqrt{s\pi};$$

atque sic scilicet

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{s}} \sqrt{x} . dx = \left(\frac{s}{2}\right) . \sqrt{s\pi},$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{s}} x\sqrt{x} . dx = 1.3 \left(\frac{s}{2}\right)^2 . \sqrt{s\pi},$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{s}} x^2 \sqrt{x} . dx = 1.3.5 \left(\frac{s}{2}\right)^3 . \sqrt{s\pi};$$

quæ quidem, peractis rite substitutionibus, dabunt

$$-\int_0^\infty \frac{\eta\, d\varphi}{\sqrt{H}} = \varphi(o)\left(\frac{8A^3 - 4A^2B - 2AC - 3D}{8A^2}\right)\cdot\frac{\eta\sqrt{\pi}}{\sqrt{2A\tau}} - \varphi(o)\left(\frac{4A^3 + 2A^2B + 3AC - 45D}{32A^3}\right)\cdot\frac{\eta\sqrt{\tau\pi}}{\sqrt{2A}} + \varphi(o)\left(\frac{2A^2 + 3AB - 10C}{256A^3}\right)\cdot\frac{9\eta\tau\sqrt{\tau\pi}}{\sqrt{2A}} \quad \ldots (62)$$

ubi primo quidem paragraphi 49:næ casu

$$\frac{8A^3 - 4A^2B - 2AC - 3D}{8A^2} = 1.0620441\ldots \text{Log.} = 0.0261426$$

$$\frac{4A^3 + 2A^2B + 3AC - 45D}{32A^3} = 0.1435501\ldots 9'.1570034$$

$$\frac{2A^3 + 3AB - 10C}{256A^3} = 0.0106055\ldots 8'.0255328;$$

secundo autem ejusdem paragraphi casu

$$\frac{8A^3 - 4A^2B - 2AC - 3D}{8A^2} = 1.0556985\ldots 0.0235399$$

$$\frac{4A^3 + 2A^2B + 3AC - 45D}{32A^3} = 0.1659130\ldots 9'.2198804$$

$$\frac{2A^2 + 3AB - 10C}{256A^3} = 0.0093894\ldots 7'.9726395$$

atque tandem tertio hujusce paragraphi casu

$$\frac{8A^3 - 4A^2B - 2AC - 3D}{8A^2} = 1.0605626 \quad . \quad 0.0255363$$

$$\frac{4A^3 + 2A^2B + 3AC - 45D}{32A^3} = 0.1067640 \quad . \quad 9'.0284250$$

$$\frac{2A^2 + 3AB - 10C}{256A^3} = 0.0115677 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8'.0632469$$

Ex quibus adeo omnibus sequens obtinebimus computationum primo scilicet casu instituendarum diagramma

| | | |
|---|---|---|
| Logar. 2 . . . . . | 0.3010300 | |
| Logar. $\tau$ . . . . . | 7'.1132014 | |
| Logar. $A$ . . . . . | 0.1061647 | |
| | 7'.5203961 | |
| | 8'.7601980 | |
| Compl. Log. $\sqrt{2\tau A}$ . . | 1.2398020 | |
| Log. $\sqrt{\pi}$ . . . . . | 0.2485749 | |
| Log. $\eta$ . . . . . | 1.7659137 | |
| Logar. $\frac{\eta\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\tau A}}$ . . . | 3.2542906 | |
| | 0.0261426 | |
| | 3.2804332 . . . . . | + 1907″362 |
| Log $\frac{\eta\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\tau A}}$ . . . . | 3.2542906 | |
| Log. $\tau$ . . . . . | 7'.1132014 | |
| | 0.3674920 | |
| | 9'.1570034 | |
| | 9.5244954 | — 0″.335 |
| | | + 1907.027 |

| | | |
|---|---|---|
| Log. $\frac{\eta\sqrt{\tau\pi}}{\sqrt{2A}}$ . . . | 0.3674920 | |
| Log. 9 . . . . . | 0.9542425 | |
| Log. $\tau$ . . . . . | 7′.1132014 | |
| | 8′.0255328 | |
| | 6′.4604687 | + 0″000 |

atque sic tandem patebit primum refractionis horizontalis terminum ex prima quidem paragraphi 49:næ formula fore = 1907″027 = 31′47″.027, cum ex secunda prodeat = 1895″.579 = 31′35″.579, atque tandem ex tertia = 1904″.452 = 31′44″452.

## §. 52.

Jam ut ad secundum quoque refractionis terminum evolvendum accedamus, tenendum scilicet est esse

$$\varphi(o) - \varphi + \frac{K}{H} = [\varphi(o) - \varphi] \cdot \left(\frac{1}{2x} + \frac{7}{4}\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{H}}\left(\varphi(o) - \varphi + \frac{K}{H}\right) = [\varphi(o) - \varphi] \cdot \left(\frac{1}{2x\sqrt{2x}} + \frac{13}{8\sqrt{2x}}\right);$$

ideoque cum sit $d\varphi[\varphi(o) - \varphi] =$

$$\varphi(o)^2 \cdot e^{-\frac{Ax}{\tau}}\left(1 - e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)dx \cdot \left\{\begin{array}{l} \frac{B-A}{\tau} + \frac{2C-AB}{\tau^2} \cdot x \\ + \frac{3D-AC}{\tau^3} x^2 - \frac{AD}{\tau^4} x^3 \end{array}\right\}$$

$$-\varphi(o)^2 . e^{-\frac{2Ax}{\tau}} dx . \left\{ \begin{array}{l} \frac{B^2 - AB}{\tau^2} x + \frac{3BC - AC - AB^2}{\tau^3} x^2 \\ + \frac{4BD - 2ABC + 2C^2 - AD}{\tau^4} x^3 \\ + \frac{5CD - 2ABD - AC^2}{\tau^5} x^4 \\ + \frac{3D^2 - 2ACD}{\tau^6} x^5 - \frac{AD^2}{\tau^7} x^6 \end{array} \right\}$$

fiet adeo tandem

$$-\frac{\eta^2 d\varphi}{\sqrt{H}} \left( \varphi(o) - \varphi + \frac{K}{H} \right) =$$

$$\eta^2 \varphi(o)^2 e^{-\frac{Ax}{\tau}} \left( 1 - e^{-\frac{Ax}{\tau}} \right) dx . \left\{ \begin{array}{l} \frac{A - B}{2\tau\sqrt{2} . x\sqrt{x}} + \frac{AB - 2C}{2\tau^2\sqrt{2} . \sqrt{x}} \\ - \frac{3D - AC}{2\tau^3\sqrt{2}} \sqrt{x} + \frac{AD}{2\tau^4\sqrt{2}} x\sqrt{x} \\ + \frac{13(A - B)}{8\tau\sqrt{2} . \sqrt{x}} + \frac{13(AB - 2C)}{8\tau^2 . \sqrt{2}} \sqrt{x} \\ + \frac{13(AC - 3D)}{8\tau^3\sqrt{2}} x\sqrt{x} + \frac{13AD}{8\tau 4\sqrt{2}} x^2\sqrt{x} \end{array} \right\}$$

$$-\eta^2\varphi(o)^2 \cdot e^{-\frac{2Ax}{\tau}} dx \cdot \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{AB-B^2}{2\tau^2\sqrt{2}\sqrt{x}} + \dfrac{AC+AB^2-3BC}{2\tau^3\cdot\sqrt{2}}\sqrt{x} \\ + \dfrac{2ABC+AD-4BD-2C^2}{2\tau^4\sqrt{2}} \cdot x\sqrt{x} \\ + \dfrac{2ABD+AC^2-5CD}{2\tau^5\sqrt{2}} \cdot x^2\sqrt{x} \\ + \dfrac{2ACD-3D^2}{2\tau^6\sqrt{2}} x^8\sqrt{x} + \dfrac{AD^2}{2\tau^7\sqrt{2}} x^4\sqrt{x} \\ + \dfrac{13(AB-B^2)}{8\tau^2\sqrt{2}}\sqrt{x} + \dfrac{13(AC+AB^2-3BC)}{8\tau^3\sqrt{2}} x\sqrt{x} \\ + \dfrac{13(2ABC+AD-4BD-2C^2)}{8\tau^4\sqrt{2}} x^2\sqrt{x} \\ + \dfrac{13(2ABD+AC^2-5CD)}{8\tau^5\sqrt{2}} x^3\sqrt{x} \\ + \dfrac{13(2ACD-3D^2)}{8\tau^6\sqrt{2}} x^4\sqrt{x} + \dfrac{13AD}{8\tau^7\sqrt{2}} x^5\sqrt{x} \end{array} \right\}.$$

**Ideoque, cum integralibus a limite $x = 0$, ad $x = \infty$ sumendis, sit**

$$\int e^{-\frac{Ax}{\tau}} \left(1 - e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right) \cdot \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{\tau} A\sqrt{\frac{\tau\pi}{A}},$$

$$\int e^{-\frac{Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\tau\pi}{A}}\,,$$

$$\int e^{-\frac{Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)\cdot dx\sqrt{x}=\frac{4-\sqrt{2}}{8A}\sqrt{\frac{\tau\pi}{A}}\cdot\tau\,,$$

$$\int e^{-\frac{Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)\cdot x\,dx\sqrt{x}=\frac{3(8-\sqrt{2})}{32A^2}\tau^2\sqrt{\frac{\tau\pi}{A}}\,,$$

$$\int e^{-\frac{Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)\cdot x^2\,dx\sqrt{x}=\frac{3.5(16-\sqrt{2})}{128A^3}\tau^3\sqrt{\frac{\tau\pi}{A}}\,,$$

$$\int e^{-\frac{2Ax}{\tau}}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\tau\pi}{A}}\,,$$

$$\int e^{-\frac{2Ax}{\tau}}dx\sqrt{x}=\frac{\tau\sqrt{2}}{8A}\sqrt{\frac{\tau\pi}{A}}\,,$$

$$\int e^{-\frac{2Ax}{\tau}}x\,dx\sqrt{x}=\frac{3\sqrt{2}\cdot\tau^2}{32A^2}\sqrt{\frac{\tau\pi}{A}}\,,$$

$$\int e^{-\frac{2Ax}{\tau}}x^2\,dx\sqrt{x}=\frac{15\sqrt{2}\cdot\tau^3}{128A^3}\sqrt{\frac{\tau\pi}{A}}\,,$$

$$\int e^{-\frac{2Ax}{\tau}} x^3\,dx\sqrt{x} = \frac{105\sqrt{2}.\tau^4}{512\,A^4}\sqrt{\frac{\tau\pi}{A}}$$

$$\int e^{-\frac{2Ax}{\tau}} x^4\,dx\sqrt{x} = \frac{945\sqrt{2}.\tau^5}{2048\,A^5}\sqrt{\frac{\tau\pi}{A}},$$

$$\int e^{-\frac{2Ax}{\tau}} x^5\,dx\sqrt{x} = \frac{10395\sqrt{2}.\tau^6}{8192\,A^6}\sqrt{\frac{\tau\pi}{A}}$$

prodibit utique sic

$$-\int \frac{\eta^2\,d\varphi}{\sqrt{H}}\left(\varphi(0) - \varphi + \frac{K}{H}\right) =$$

$$\eta^2\varphi(0)^2\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\cdot\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A^2-AB}{\tau}(\sqrt{2}-1) + \dfrac{AB-2C}{4\tau}(2-\sqrt{2}) \\ \\ + \dfrac{AC-3D}{16\,A\tau}(4-\sqrt{2}) + \dfrac{3D(8-\sqrt{2})}{64\,A\tau}\end{array}\right\}$$

$$+\eta^2\varphi(0)^2\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{13(A-B)}{16}(2-\sqrt{2}) + \dfrac{13(AB-2C)}{64\,A}(4-\sqrt{2}) \\ \\ + \dfrac{39(AC-3D)}{256\,A^2}(8-\sqrt{2}) + \dfrac{195D(16-\sqrt{2})}{1024\,A^2}\end{array}\right\}$$

$$-\eta^2\varphi(o)^2\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\cdot\left\{\begin{array}{l}\dfrac{AB-B^2}{2\tau\sqrt{2}}+\dfrac{AC+AB^2-3BC}{8\tau\sqrt{2}\cdot A}\\[2ex]+\dfrac{3(2ABC+AD-4BD-2C^2)}{32A^2\tau\sqrt{2}}\\[2ex]+\dfrac{15(2ABD+AC^2-5CD)}{128A^3\tau\sqrt{2}}\\[2ex]+\dfrac{105(2AC-3D)D}{512A^4\tau\sqrt{2}}+\dfrac{945D^2}{2048A^4\tau\sqrt{2}}\end{array}\right.$$

$$-\eta^2\varphi(o)^2\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{13(AB-B^2)}{32A\sqrt{2}}+\dfrac{39(AC+AB^2-3BC)}{128\sqrt{2}\cdot A^2}\\[2ex]+\dfrac{195(2ABC+AD-4BD-2C^2)}{512A^3\sqrt{2}}\\[2ex]+\dfrac{1365(2ABD+AC^2-5CD)}{2048A^4\sqrt{2}}\\[2ex]+\dfrac{12285(2ACD-3D^2)}{8192A^5\sqrt{2}}+\dfrac{135135D^2}{32768A^5\sqrt{2}}\end{array}\right. \quad \ldots(63)$$

ubi in hypothesi $\varphi(o) = 1$, atque ex casu primo paragraphi 49:næ

| | |
|---|---|
| $A = 1.2769231$, | Logar. = 0.1061647 |
| $B = 0.4551409$, | 9′.6581459 |
| $C = -0.0648239$, | 8′.8117351 |
| $D = 0$, | |

| | | |
|---|---|---|
| $A - B$ . . . . . | + 0.8217822 . . . | 9.9147568 |
| $AB - 2C$ . . . . . | + 0.7108277 . . . | 9.8517643 |
| $AC - 3D$ . . . . . | — 0.0827751 . . . | 8.9178998 |
| $2AC - 3D$ . . . . . | — 0.1655502 . . . | 9.2189298 |
| $AC + AB^2 - 3BC$ . . . | + 0.2702557 . . . | 9.4317749 |
| $2ABC + AD - 4BD - 2C^2$ . . | — 0.0837530 . . . | 8.9230004 |
| $2ABD + AC^2 - 5CD$ . . | + 0.0053658 . . . | 7.7296349 |
| $\eta^2 . \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}$ . . . . | + 391″3613 . . . | 2.5925778 |
| $\eta^2 . \sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}$ . . . . . | + 0″5079012 . . . | 9.7057792 |
| $\sqrt{2} - 1$ . . . . . | + 0.4142137 . . . | 9.6172245 |
| $2 - \sqrt{2}$ . . . . . | + 0.5857863 . . . | 9.7677392 |
| $4 - \sqrt{2}$ . . . . . | + 2.5857863 . . . | 0.4125926 |
| $8 - \sqrt{2}$ . . . . . | + 6.5857863 . . . | 0.8186076 |
| $16 - \sqrt{2}$ . . . . . | +14.5857863 . . . | 1.1639298 |

| | | |
|---|---|---|
| Log. $(A^2 - AB)$ . . . . . | 0.0209215 | |
| Log. $(\sqrt{2} - 1)$ . . . . . | 3.6172245 | |
| | 2.5925778 | |
| | 2.2307238 . . . | + 170.108 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log $(AB - 2C)$ . . . . . | 9.8517643 | | |
| Log. $\frac{1}{4}(2 - \sqrt{2})$ . . . . . | 9.1656795 | | |
| | 2.5925778 | | |
| | 1.6100216 . . | + | 40″.740 |
| | | | + 210″.848 |
| Log. $(AC - 3D) \cdot \frac{1}{A}$ . . . | 8.8117351 | | |
| Log. $\frac{1}{16}(4 - \sqrt{2})$ . . . . . | 9.2084726 | | |
| | 2.5925778 | | |
| | 0.6127855 . . | — | 4″.100 |
| | | | + 206″.748 |
| Log. $(AB - B^2)$ . . . . . | 9.5729027 | | |
| Compl. Log. $2\sqrt{2}$ . . . . . | 9.5484550 | | |
| | 2.5925778 | | |
| | 1.7139355 . . | — | 51″.753 |
| | | | + 154″.995 |
| Log. $\frac{1}{A}(AC + AB^2 - 3BC)$ . . | 9.3256102 | | |
| Compl. log. $8\sqrt{2}$ . . . . . | 8.9463950 | | |
| | 2.5925778 | | |
| | 0.8645830 . . | — | 7″.321 |
| | | | 147″674 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log. $\frac{3}{A^2}(2ABC+AD-4BD-2C^2)$.. | 9.1877923 | | |
| Compl. log. $32\sqrt{2}$ . . . . | 8.3443350 | | |
| | 2.5925778 | | |
| | 0.1247051 | + | 1″.333 |
| | | + | 149.007 |
| Log. $\frac{15}{A^3}(2ABD+AC^2-5CD)$. . . | 8.5872321 | | |
| Compl. Log. $128\sqrt{2}$ . . . . | 7.7422750 | | |
| | 2.5925778 | | |
| | 8.9220849 | — | 0″.084 |
| | | + | 148″.913 |
| Log. $13(A-B)$ . . . . . | 1.0287002 | | |
| Log. $\frac{1}{16}(2-\sqrt{2})$ . . . . | 8.5636192 | | |
| | 9.7057792 | | |
| | 9.2980986 | + | 0″.199 |
| | | + | 149″.112 |
| Log. $\frac{13}{A}(AB-2C)$ . . . . | 0.8595430 | | |
| Log. $\frac{1}{64}(4-\sqrt{2})$ . . . . | 8.6064126 | | |
| | 9.7057792 | | |
| | 9.1717348 | + | 0″.149 |
| | | + | 149″.261 |

Log. $\frac{39}{A^2}(AC - 3D)$ . . . 0.2966350

Logar. $\frac{1}{2}\frac{1}{5}\frac{1}{6}(8 - \sqrt{2})$ . . . . 8.4103676

9.7057792

8.4127818 . . — 0″.026

\+ 149.235

Log. $\frac{13}{A}(AB - B^2)$ : . . 0.5806814

Compl. Log. $32\sqrt{2}$ . . . . 8.3443350

9.7057792

8.6307956 . . — 0″.043

\+ 149″.192

Log. $\frac{39}{A^2}(AC + AB^2 - 3BC)$ . . . 0.8105101

Compl. Log. $128\sqrt{2}$ . : . 7.7422750

9.7057792

8.2585643 . : — 0″.018

\+ 149.174

Unde patet secundum adeo terminum ex prima paragraphi 49:næ formula proditurum esse = + 2′29″.174; atque sic denique amborum terminorum summam = 34′16″.201

## §. 53.

Quod ad tertium attinet terminum, primum equidem

animadvertendum occurrit, esse $K(\varphi(o) - \varphi) = L$, ideoque

$$K[\varphi(o) - \varphi] - \frac{L}{2} + \frac{3K^2}{2H} = \frac{3K^2}{2H} + \frac{L}{2}$$

$$= \left(\frac{25}{8} + \frac{3}{4x}\right) \cdot [\varphi(o) - \varphi]^2$$

ubi cum evolutione in seriem facta, quæ secundum ascendentes progrediatur ipsius $x$ dignitates,

$$\frac{1}{H\sqrt{H}}\left(\frac{3K^2}{2H} + \frac{L}{2}\right) = \left(\frac{3}{8\sqrt{2}.x^2\sqrt{x}} + \frac{41}{32\sqrt{2}.x\sqrt{x}}\right) \cdot [\varphi(o) - \varphi]^2$$

$$[\varphi(o) - \varphi]^2 =$$

$$\varphi(o)^2 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left(1 - e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^2 - e^{-\frac{Ax}{\tau}}\left(1 - e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right) \cdot \left(\frac{2Bx}{\tau} + \right. \\ \qquad \left. \frac{2Cx^2}{\tau^2} + \frac{2Dx^3}{\tau^3}\right) \\ + e^{-\frac{2Ax}{\tau}}\left(\frac{B^2x^2}{\tau^2} + \frac{2BCx^3}{\tau^3} + \frac{(C^2 + 2BD)x^4}{\tau^4} + \right. \\ \qquad \left. \frac{2CDx^5}{\tau^5} + \frac{D^2x^6}{\tau^6}\right) \end{array} \right\}$$

$$d\varphi[\varphi(o) - \varphi]^2 =$$

$$\varphi(o)^3 \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{B-A}{\tau} + \dfrac{2C-AB}{\tau^2}\, x \\ + \dfrac{3D-AC}{\tau^3}\, x^2 - \dfrac{AD}{\tau^4} x^3 \end{array} \right\} . e^{-\frac{Ax}{\tau}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^2} . dx$$

$$+\varphi(o)^3 . \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2(AB-B^2)x}{\tau^2} + \dfrac{2(AB^2+AC-3BC)x^2}{\tau^3} \\ + \dfrac{2(2ABC+AD-4BD-2C^2)x^3}{\tau^4} \\ + \dfrac{2(AC^2+2ABD-5CD)x^4}{\tau^5} \\ + \dfrac{2(2ACD-3D^2)x^5}{\tau^6} - \dfrac{2AD^2x^6}{\tau^7} \end{array} \right\} . e^{-\frac{2Ax}{\tau}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)} . dx$$

$$+\varphi(o)^3 . \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{B^3-AB^2}{\tau^3} x^2 + \dfrac{4B^2C-2ABC-AB^3}{\tau^4} x^3 \\ + \dfrac{5BC^2+5B^2D-AC^2-2ABD-3AB^2C}{\tau^5} x^4 \\ + \dfrac{2BCD-2ACD+2C^3+9BCD-3ABC^2-3AB^2D}{\tau^6} x^5 \\ + \dfrac{ED^2-AD^2+7C^2D-6ABCD+6BD^2-AC^3}{\tau^7} x^6 \\ + \dfrac{8CD^2-3ABD^2-3AC^2D}{\tau^8} x^7 \\ + \dfrac{3D^3-3ACD^2}{\tau^9} x^8 - \dfrac{AD^3}{\tau^{10}} . x^9 \end{array} \right\} . e^{-\frac{3Ax}{\tau}} dx$$

fiet adeo tandem

$$-\frac{\eta^3 d\varphi}{HV H}\left(K[\varphi(o)-\varphi]-\frac{L}{2}+\frac{3K^2}{2H}\right)=$$

$$-\eta^3\varphi(o)^3\cdot\left\{\begin{array}{l}\dfrac{3(B-A)}{8\tau V 2.x^2 V x}+\dfrac{3(2C-AB)}{8\tau^2 V 2.x V x}\\ +\dfrac{3(3D-AC)}{8\tau^3 V 2.V x}-\dfrac{3AD.V x}{8\tau^4.V 2}\end{array}\right\}.e^{-\frac{Ax}{\tau}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^2}dx$$

$$-\eta^3\varphi(o)^3\cdot\left\{\begin{array}{l}\dfrac{3(AB-B^2)}{4\tau^2 V 2.xV x}+\dfrac{3(AB^2+AC-3BC)}{4\tau^3 V 2.V x}\\ +\dfrac{3(2ABC+AD-4BD-2C^2)}{4\tau^4 V 2}V x\\ +\dfrac{3(AC^2+2ABD-5CD).xV x}{4\tau^5.V 2}\\ +\dfrac{3(2ACD-3D^2)}{4\tau^6 V 2}x^2 V x-\dfrac{3AD^2x^3 V x}{4\tau^7 V 2}\end{array}\right\}.e^{-\frac{2Ax}{\tau}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)}dx$$

$$-\eta^3\varphi(o)^3\cdot\left\{\begin{array}{l}\dfrac{3(B^3-AB^2)}{8\tau^3 V 2.V x}+\dfrac{3(4B^2C-2ABC-AB^3)}{8\tau^4 V 2}V x\\ +\dfrac{3(5BC^2+5B^2D-AC^2-2ABD-3AB^2C)}{8\tau^5 V 2}xV x\\ +\dfrac{3(12BCD-2ACD+2C^3-3ABC^2-3AB^2D)}{8\tau^6 V 2}x^2 V x\\ +\dfrac{3(BD^2-AD^2+7C^2D-6ABCD+6BD^2-AC^3}{8\tau 7 V 2}x^3 V x\\ +\dfrac{3(8CD^2-3ABD^2-3AC^2D)}{8\tau^8 V 2}x^4 V x\\ +\dfrac{3(3D^3-3ACD^2)}{8\tau^9 V 2}x^5 V x-\dfrac{3AD^3}{8\tau^{10} V 2}.x^6 V x\end{array}\right\}.e^{-\frac{5Ax}{\tau}}dx$$

$$-\eta^3\varphi(o)^3\cdot\left\{\begin{array}{l}\dfrac{41(B-A)}{32\tau\sqrt{2}.x\sqrt{x}}+\dfrac{41(2C-AB)}{32\tau^2\sqrt{2}.\sqrt{x}}\\ +\dfrac{41(3D-AC)}{32\tau^3\sqrt{2}}\sqrt{x}-\dfrac{41AD}{32\tau^4\sqrt{2}}x\sqrt{x}\end{array}\right\}.e^{-\frac{Ax}{\tau}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^2}dx$$

$$-\eta^3\varphi(o)^3\cdot\left\{\begin{array}{l}\dfrac{41(AB-B^2)}{16\tau^2\sqrt{2}\sqrt{x}}+\dfrac{41(AB^2+AC-3BC)}{16\tau^3\sqrt{2}}\sqrt{x}\\ +\dfrac{41(2ABC+AD-4BD-2C^2)}{16\tau^4\sqrt{2}}x\sqrt{x}\\ +\dfrac{41(AC^2+2ABD-5CD)}{16\tau^5\sqrt{2}}x^2\sqrt{x}\\ +\dfrac{41(2ACD-3D^2)}{16\tau^6\sqrt{2}}x^3\sqrt{x}-\dfrac{41AD^2x^4\sqrt{x}}{16\tau^7\sqrt{2}}\end{array}\right\}.e^{-\frac{2Ax}{\tau}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)}dx$$

negligendo scilicet terminos, quorum valores numerici ne centesimam quidem efficiunt minuti secundi partem.

Ideoque, cum integralibus ita sumendis ut evanescant posito $x=o$, sit scilicet pro $x=\infty$,

$$\int e^{-\frac{Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^2\frac{dx}{x^2\sqrt{x}}=\frac{4A^2\sqrt{2}}{3\tau}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}(3\sqrt{3}-4\sqrt{2}+1),$$

$$\int e^{-\frac{Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^2\cdot\frac{dx}{x\sqrt{x}}=-2A\sqrt{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1),$$

$$\int e^{-\frac{Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^2.\frac{dx}{\sqrt{x}}=+\tau\sqrt{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{2}}+1\right),$$

$$\int e^{-\frac{Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^2.dx.\sqrt{x}=+\frac{\tau^2}{A\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{2}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{1}\right),$$

$$\int e^{-\frac{Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^2.x dx\sqrt{x}$$

$$=\frac{3\tau^3}{2A^2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left(\frac{1}{9\sqrt{3}}-\frac{2}{4\sqrt{2}}+1\right),$$

$$\int e^{-\frac{2Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right).\frac{dx}{x\sqrt{x}}=2A\sqrt{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right),$$

$$\int e^{-\frac{2Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right).\frac{dx}{\sqrt{x}}=\tau\sqrt{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\int e^{-\frac{2Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right).dx\sqrt{x}=\frac{\tau^2}{A\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right),$$

$$\int e^{-\frac{2Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right).xdx\sqrt{x}=\frac{3\tau^3}{2A^2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{9\sqrt{3}}\right),$$

$$\int e^{-\frac{2Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right).x^2dx\sqrt{x}=\frac{15\tau^4}{4A^3\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left(\frac{1}{8\sqrt{2}}-\frac{1}{27\sqrt{3}}\right),$$

$$\int e^{-\frac{2Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right).x^3dx\sqrt{x}=\frac{105\tau^5}{8A^4\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left(\frac{1}{16\sqrt{2}}-\frac{1}{81\sqrt{3}}\right),$$

$$\int e^{-\frac{2Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right).x^4dx\sqrt{x}$$

$$=\frac{945\tau^6}{16A^5\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left(\frac{1}{32\sqrt{2}}-\frac{1}{243\sqrt{3}}\right),$$

$$\int e^{-\frac{3Ax}{\tau}}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{\tau\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}},$$

$$\int e^{-\frac{3Ax}{\tau}}dx\sqrt{x}=\frac{\tau^2}{3A\sqrt{6}}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}},$$

$$\int e^{-\frac{3Ax}{\tau}}.xdx\sqrt{x}=\frac{3\tau^3}{18A^2\sqrt{6}}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}},$$

$$\int e^{-\frac{3Ax}{\tau}}.x^2dx\sqrt{x}=\frac{15\tau^4}{108A^3\sqrt{6}}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}},$$

$$\int e^{-\frac{3Ax}{\tau}} . x^3 dx \sqrt{x} = \frac{35\tau^5}{216A^4\sqrt{6}} \sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}} ,$$

$$\int e^{-\frac{3Ax}{\tau}} . x^4 dx \sqrt{x} = \frac{35\tau^6}{144A^5\sqrt{6}} \sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}} ,$$

$$\int e^{-\frac{3Ax}{\tau}} . x^5 dx \sqrt{x} = \frac{385\tau^7}{864A^6\sqrt{6}} \sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}} ,$$

$$\int e^{-\frac{3Ax}{\tau}} . x^6 dx \sqrt{x} = \frac{5005\tau^8}{5184A^7\sqrt{6}} \sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}} ,$$

prodibit utique ex his

$$-\int \frac{\eta^3 d\varphi}{H\sqrt{H}} \left( K[(o) - \varphi] - \frac{L}{2} + \frac{3K^2}{2H} \right) =$$

$$\frac{\eta^3 \varphi(o)^3}{2\tau^2} \sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}} \left\{ \begin{array}{l} A^2(A-B)\,(3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 1) \\ -\frac{3A(AB-2C)}{2}\,(\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1) \\ +\frac{3(AC-3D)}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right) \\ +\frac{3AD}{8}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{2\sqrt{2}} + 1\right) \end{array} \right\}$$

$$-\frac{\eta^3\Phi(v)^3}{2\tau^2}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left\{\begin{array}{l} 3AB(A-B)\,(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \\ \quad +\dfrac{3(AB^2+AC-3BC)}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ +\dfrac{3(2ABC+AD-4BD-2C^2)}{4A}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right) \\ +\dfrac{9(AC^2+2ABD-5CD)}{8A^2}\left(\dfrac{1}{4\sqrt{2}}-\dfrac{1}{9\sqrt{3}}\right) \\ +\dfrac{45(2ACD-3D^2)}{16A^3}\left(\dfrac{1}{8\sqrt{2}}-\dfrac{1}{27\sqrt{3}}\right)- \\ \quad \dfrac{315D^2}{32A^3}\left(\dfrac{1}{16\sqrt{2}}-\dfrac{1}{81\sqrt{3}}\right) \end{array}\right\}$$

$$+\frac{\eta^3\Phi(o)^3}{2\tau^2}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{3B^2(A-B)}{4\sqrt{2}}+\dfrac{2ABC+AB^3-4B^2C}{8A\sqrt{3}} \\ +\dfrac{AC^2+2ABD+3AB^2C-5BC^2-5B^2D}{16A^2\sqrt{3}} \\ +\dfrac{5(2ACD+3ABC^2+3AB^2D-2BCD-2C^3-9BCD)}{96A^3\sqrt{3}} \\ +\dfrac{35(AD^2+6ABCD+AC^3-BD^2-7C^2D-6BD^2)}{576A^4\sqrt{3}} \\ +\dfrac{35(3ABD^2+3AC^2D-8CD^2)}{384\sqrt{3}.A^5} \\ +\dfrac{385(ACD^2-D^3)}{768A6\sqrt{3}}-\dfrac{5005D^3}{13824A^6\sqrt{3}} \end{array}\right\}$$

$$+\frac{\eta^3\Phi(o)^3}{2\tau}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left\{\begin{array}{l}\frac{41A(B-A)}{8}\ (\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)\\ +\frac{41(AB-2C)}{16}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{2}}+1\right)\\ +\frac{41(AC-3D)}{32A}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{2}{2\sqrt{2}}+1\right)\\ +\frac{123D}{64A^2}\left(\frac{1}{9\sqrt{3}}-\frac{2}{4\sqrt{2}}+1\right)\end{array}\right\}$$

$$-\frac{\eta^3\Phi(o)^2}{2\tau}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left\{\begin{array}{l}\frac{41(AB-B^2)}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\\ \qquad\frac{41(AB^2+AC-3BC)}{16A}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\\ +\frac{123(2ABC+AD-4BD-2C^2)}{32A^2}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{9\sqrt{3}}\right)\end{array}\right\}$$

$$-\frac{\eta^3\Phi(o)^3}{2\tau}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left\{\begin{array}{l}\frac{605(AC^2+2ABD-5CD)}{64A^3}\left(\frac{1}{8\sqrt{2}}-\frac{1}{27\sqrt{3}}\right)\\ +\frac{4305(2ACD-3D^2)}{128A^4}\left(\frac{1}{16\sqrt{2}}-\frac{1}{81\sqrt{3}}\right)-\\ \qquad\frac{38745D^2}{256A^4}\left(\frac{1}{32\sqrt{2}}-\frac{1}{243\sqrt{3}}\right)\end{array}\right\}$$

ex quibus eum sit

| | | | |
|---|---|---|---|
| $3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 1$ | $=$ | $+ 0.5392977 \ldots$ | Log. $= 9.7318286$ |
| $\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1$ | | $- 0.0963765 \ldots\ldots$ | $8.9839712$ |
| $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 \ldots$ | | $+ 0.1631366 \ldots\ldots$ | $9.2125514$ |
| $\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{2\sqrt{2}} + 1 \ldots$ | | $+ 0.4853433 \ldots\ldots$ | $9.6860491$ |
| $\frac{1}{9\sqrt{3}} - \frac{2}{4\sqrt{2}} + 1 \ldots$ | | $+ 0.7105906 \ldots\ldots$ | $9.8516231$ |
| $\sqrt{3} - \sqrt{2} \ldots$ | | $+ 0.3178371 \ldots\ldots$ | $9.5022046$ |
| $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \ldots$ | | $+ 0.1297566 \ldots\ldots$ | $9.1131294$ |
| $\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \ldots$ | | $+ 0.1611033 \ldots\ldots$ | $9.2071036$ |
| $\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{9\sqrt{3}} \ldots$ | | $+ 0.1126266 \ldots\ldots$ | $9.0516409$ |
| $\frac{1}{8\sqrt{2}} - \frac{1}{27\sqrt{3}} \ldots$ | | $+ 0.0670050 \ldots\ldots$ | $8.8261072$ |
| $\frac{1}{16\sqrt{2}} - \frac{1}{81\sqrt{3}} \ldots$ | | $+ 0.0370664 \ldots\ldots$ | $8.5689804$ |
| $\frac{1}{32\sqrt{2}} - \frac{2}{243\sqrt{3}} \ldots$ | | $+ 0.0197212 \ldots\ldots$ | $8.2949333$ |

tum vero primo paragraphi 49:næ casu

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A - B \ldots$ | $=$ | $+ 0.8217822 \ldots\ldots$ | $9.9147568$ |
| $AB - 2C \ldots$ | | $+ 0.7108277 \ldots\ldots$ | $9.8517643$ |

$AC + AB^2 - 3BC$ . . . + 0.2702557 . . . 9.4317749

$2ABC + AD - 4BD - 2C^2$ . . — 0.0837530 . . . 8.9230004

$AC^2 + 2ABD - 5CD$ . . . . + 0.0053658 . . . 7.7296349

$2ABC + AB^3 - 4B^2C$ . . . . + 0.0987585 . . . 8.9945745

$AC^2 + 3AB^2C - 5BC^2$ . . . — 0.055638 . . . 8.7453747

$3ABC^2 - 2C^3$ . . . . . + 0.0078714 . . . 7.8960520

prodibit adeo ex his quod sequitur diagramma

Log. $\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}$ . . . . . 1.4883769

Log. $\frac{1}{2}\eta^3$ . . . . . 4.3678609

Compl. Log. $\tau^2$ . . . . . 5.7735972

Log. $\frac{\eta^3}{2\tau^2}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}$ . . . . . 1.6298350

Log $\tau$ . . . . . 7.1132014

Log. $\frac{\eta^3}{2\tau}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}$ . . . . . 8.7430364

Log. $A^2(A - B)$ . . . . . 0.1270862

Log. $(3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 1)$ . . . 9.7318286

1.6298350

1.4887498 . . + 30″.814

| | | |
|---|---|---|
| Log. $A(AB-2C)$ . . . . | 9.9579290 | |
| Log. $\frac{3}{2}(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)$ . . | 9.1600625 | |
| | 1.6298350 | |
| | 0.7478265 . . | + 5″.595 |
| Log. $\frac{3}{4}AC$ . . . . . | 8.7929611 . . | + 36″.409 |
| Log. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{2}}+1\right)$ . . | 9.2125514 | |
| | 1.6298350 | |
| | 9.6353475 . . | — 0″.432 |
| | | + 35″.977 |
| Log. $3AB(A-B)$ . . . . | 0.1561887 | |
| Log. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ . . . . | 9.5022046 | |
| | 1.6298350 | |
| | 1.2882283 . . | — 19″.419 |
| | | + 16″.558 |
| Log. $(AC+AB^2-3BC)$ . . | 9.4317749 | |
| Log. $\frac{3}{2}$ . . . . . | 0.1760913 | |
| Log. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ . . . . | 9.1131294 | |
| | 1.6298350 | |
| | 0.3508306 . . | — 2″.243 |
| | | + 14″.315 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log. $2(ABC - C^2)$ . . . . | 8.9230004 | | |
| Compl. Log. $A$ . . . . . | 9.8938353 | | |
| Log. $\frac{3}{4}$ . . . . . | 9.8750613 | | |
| Log. $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$ . . . | 9.2071036 | | |
| | 1.6298350 | | |
| | 9.5288356 | + | 0″.338 |
| | | + | 14″.653 |
| Log. $\frac{C^2}{A}$ . . . . . | 7.5173055 | | |
| Log. $\frac{9}{8}$ . . . . . | 0.0511525 | | |
| Log. $\left(\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{9\sqrt{3}}\right)$ . . . | 9.0516409 | | |
| | 1.6298350 | | |
| | 8.2499339 | − | 0″.018 |
| | | + | 14.635 |
| Log. $B^2(A - B)$ . . . . . | 9.2310486 | | |
| Log. $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ . . . . . | 9.6365006 | | |
| | 1.6298350 | | |
| | 0.4973842 | + | 3″.143 |
| | | + | 17″.778 |

| | | |
|---|---|---|
| Log. $(2ABC + AB^3 - 4B^2C)$ . . | 8.9945745 | |
| Compl. Log. $A$ . . . . . | 9.8938353 | |
| Compl. Log. $8\sqrt{3}$ . . . . | 8.8583494 | |
| | 1.6298350 | |
| | 9.3765942 . . . | + 0″.238 |
| | | + 18″.016 |
| Log. $(AC^2 + 3AB^2C - 5BC^2)$ . . | 8.7453748 | |
| Compl. Log. $A^2$ . . . . . | 9.7876706 | |
| Compl. Log. $16\sqrt{3}$ . . . . | 8.5573194 | |
| | 1.6298350 | |
| | 8.7201998 . . . | — 0″.053 |
| | | + 17″.963 |
| Log. $(3ABC^2 - 2C^3)$ . . . . | 7.8960520 | |
| Compl. Log. $A^3$ . . . . . | 9.6815059 | |
| Log. $\frac{5}{96\sqrt{3}}$ . . . . . | 8.4781482 | |
| | 1.6298350 | |
| | 7.6855411 . . . | + 0″005 |
| | | + 17″968 |

Log. $A(B-A)$ . . . . . 0.0209215

Log. $\frac{41}{8}(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)$ . . 9.6936651

8.7430364

8.4576230 . . . + 0″.029

+ 17″.997

Log. $\frac{41}{16}(AB-2C)$ . . . . 0.2604282

Log. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{2}}+1\right)$ . . 9.2125514

8.7430364

8.2160160 . . . + 0″.016

+ 18″.013

Log. $\frac{C}{A}$ . . . . . 8.7055704

Log. $\frac{41}{32}$ . . . . . 0.1076339

Log. $\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+1\right)$ . . 9.6860491

8.7430364

7.2422898 . . . — 0″002

+ 18″.011

Log. $AB-B^2$ . . . 9.5729027

Log. $\frac{41}{8}$ . . . . . 0.7096939

Log. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ . . 9.1131294

8.7430364

8.1387624 — 0″014

+ 17″.997

Log. $(AB^2 + AC - 3BC)$ 9.4317749

Log. $\frac{41}{16A}$ . . . . 0.3025392

Log. $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$ . . 9.2071036

8.7430364

7.6844541 . . . . . $-0''.005$

$+17''.992$

Tertius igitur terminus ex prima formula paragraphi 49:næ erit $= +17.''992$, atque sic trium primorum terminorum summa $34'34'.193$.

## §. 54.

Jam ut quartum adgrediamur terminum, licebit utique hunc ipsum assumere

$$= \frac{-5\eta^4 K^3 d\varphi}{2H^3\sqrt{H}} = \frac{-5\eta^4 d\varphi\,[\varphi(o)-\varphi]^3}{16x^3\sqrt{2x}} ;$$

ubi cum sit

$$[\varphi(o)-\varphi]^3 = \varphi(o)^3 \cdot \left\{\left(1 - e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right) - \left(\frac{Bx}{\tau} + \frac{Cx^2}{\tau^2} + \frac{Dx^3}{\tau^3}\right)\right\}^3$$

$$= \varphi(o)^3 \cdot \left(1 - e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^3$$

$$-3\varphi(o)^3.\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^2.\left(\frac{Bx}{\tau}+\frac{Cx^2}{\tau^2}+\frac{Dx^3}{\tau^3}\right).e^{-\frac{Ax}{\tau}}$$

$$+3\varphi(o)^3.\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right).\left\{\begin{array}{l}\frac{B^2x^2}{\tau^2}+\frac{2BCx^3}{\tau^3}+\frac{C^2+2BD}{\tau^4}x^4\\ +\frac{2CD}{\tau^5}x^5+\frac{D^2x^6}{\tau^6}\end{array}\right\}.e^{-\frac{2Ax}{\tau}}$$

$$-\varphi(o).^3\left\{\begin{array}{l}\frac{B^3x^3}{\tau^3}+\frac{3B^2C}{\tau^4}x^4+\frac{3B^2D+3BC^2}{\tau^5}x^5+\frac{6BCD+C^3}{\tau^6}x^6\\ +\frac{3BD^2+3C^2D}{\tau^7}x^7+\frac{3CD^2}{\tau^8}x^8+\frac{D^3}{\tau^9}x^9\end{array}\right\}e^{-\frac{3Ax}{\tau}}$$

et $d\varphi=\varphi(o)\left\{\begin{array}{l}\frac{B-A}{\tau}+\frac{2C-AB}{\tau^2}x\\ +\frac{3D-AC}{\tau^3}x^2-\frac{AD}{\tau^4}x^3\end{array}\right\}e^{-\frac{5Ax}{\tau}}$

fiet adeo tandem

$$\frac{-5\eta^4 d\varphi\,[\varphi(o)-\varphi]^3}{16x^3\sqrt{2x}}=$$

$$+\eta^4.\varphi(o)^4\left\{\begin{array}{l}\frac{5(A-B)}{16\tau x^3.\sqrt{2x}}+\frac{5(AB-2C)}{16\tau^2x^2.\sqrt{2x}}\\ +\frac{5(AC-3D}{16\tau^3x.\sqrt{2x}}+\frac{AD}{16\tau^4\sqrt{2x}}\end{array}\right\}e^{-\frac{Ax}{\tau}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^3}dx$$

$$-\eta^4.\varphi(o)^4.\left\{\begin{array}{l}\dfrac{15B(A-B)}{16\tau^2x^2\sqrt{2x}}+\dfrac{15(AB^2+AC-3BC)}{16\tau^3x\sqrt{2x}}\\[2ex]+\dfrac{15(2ABC+AD-4BD-2C^2)}{16\tau^4\sqrt{2x}}\\[2ex]+\dfrac{15(2ABD+AC^2-5CD)}{16\tau^5\sqrt{2}}\sqrt{x}\\[2ex]+\dfrac{15(2ACD-3D^2)}{16\tau^6\sqrt{2}}x\sqrt{x}+\dfrac{15AD^2}{16\tau^7\sqrt{2}}x^2\sqrt{x}\end{array}\right\}e^{-\frac{2Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^2dx$$

$$+\eta^4\varphi(o)^4\left\{\begin{array}{l}\dfrac{15B^2(A-B)}{16\tau^3x\sqrt{2x}}+\dfrac{15B(2AC+AB^2-4BC)}{16\tau^4\sqrt{2x}}\\[2ex]+\dfrac{15(AC^2+2ABD+3AB^2C-5BC^2-5B^2D)}{16\tau^5\sqrt{2}}\sqrt{x}\\[2ex]+\dfrac{15(2ACD+3ABC^2+3AB^2D-12BCD-2C^3)}{16\tau^6\sqrt{2}}x\sqrt{x}\\[2ex]+\dfrac{15(6ABCD+AC^3+AD^2-7BD^2-7C^2D)}{16\tau^7\sqrt{2}}x^2\sqrt{x}\\[2ex]+\dfrac{15(3ABD^2+3AC^2D-8CD^2)}{16\tau^8\sqrt{2}}x^5\sqrt{x}\\[2ex]+\dfrac{45D^2(AC-D)}{16\tau^9\sqrt{2}}x^4\sqrt{x}+\dfrac{15AD^3}{16\tau^{10}\sqrt{2}}x^5\sqrt{x}\end{array}\right\}e^{-\frac{3Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{A}{\tau}}\right.$$

$$-r^4.\varphi(o)^4.\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{5B^3(A-B)}{16\tau^4\sqrt{2x}}+\dfrac{5B^2(3AC+AB^2-5BC)}{16\tau^5\sqrt{2}}\sqrt{x}\\[2ex]
+\dfrac{5B(3AC^2+3ABD+4AB^2C-9BC^2-6B^2D}{16\tau^6\sqrt{2}}x\sqrt{x}\\[2ex]
+\dfrac{5\left\{\begin{array}{l}6ABCD+4AB^3D+6AB^2C^2\\+AC^3-21B^2CD-7BC^3\end{array}\right\}}{16\tau^7\sqrt{2}}x^2\sqrt{x}\\[2ex]
+\dfrac{5\left\{\begin{array}{l}3ABD^2+3AC^2D+12AB^2CD\\+4ABC^3-12B^2D^2-24BC^2D-2C^4\end{array}\right\}}{16\tau^8\sqrt{2}}x^3\sqrt{x}\\[2ex]
+\dfrac{5\left\{\begin{array}{l}3ACD^2+6AB^2D^2+12ABC^2D\\+AC^4-9C^3D-27BCD^2\end{array}\right\}}{16\tau^9\sqrt{2}}x^4\sqrt{x}\\[2ex]
+\dfrac{5D(12ABCD+4AC^3+AD^2-10BD^2-15C^2D)}{16\tau^{10}\sqrt{2}}x5\sqrt{x}\\[2ex]
+\dfrac{5D^2(6AC^2+4ABD-11CD)}{16\tau^{11}\sqrt{2}}x^6\sqrt{x}\\[2ex]
+\dfrac{5D^3(4AC-3D)}{16\tau^{12}\sqrt{2}}x^7\sqrt{x}+\dfrac{5AD^4}{16\tau^{13}\sqrt{2}}x^8\sqrt{x}
\end{array}\right\}e^{-\frac{4Ax}{\tau}}dx$$

atque proinde, cum, integralibus ita sumendis ut evanescant posito $x = 0$, pro $x$ scilicet $= \infty$ fiat

$$\int e^{-\frac{Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^3 \frac{dx}{x^3\sqrt{x}} =$$

$$\frac{8A^3\sqrt{2}}{15\tau^2}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\,(16\sqrt{4}-3.9\sqrt{3}+3.4\sqrt{2}-1),$$

$$\int e^{-\frac{Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^3 \cdot \frac{dx}{x^2\sqrt{x}} =$$

$$\frac{4A^2\sqrt{2}}{3\tau}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\,(1-3.2\sqrt{2}+3.3\sqrt{3}-4\sqrt{4}),$$

$$\int e^{-\frac{Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^3 \cdot \frac{dx}{x\sqrt{x}} =$$

$$2A\sqrt{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\,(\sqrt{4}-3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-1),$$

$$\int e^{-\frac{Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^3 \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$\tau\sqrt{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left(1-\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right),$$

$$\int e^{-\frac{2Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^2 \cdot \frac{dx}{x^2\sqrt{x}} =$$

$$\frac{4A^2\sqrt{2}}{3\tau}\,(2\sqrt{2}-2.3\sqrt{3}+4\sqrt{4})\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}},$$

$$\int e^{-\frac{2Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^2 \cdot \frac{dx}{x\sqrt{x}} =$$

$$\frac{-2A\sqrt{2}}{1}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\,(\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{4}),$$

$$\int e^{-\frac{2Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^2 \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$\tau\sqrt{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}\right),$$

$$\int e^{-\frac{2Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^2 \cdot dx\sqrt{x} =$$

$$\frac{\tau^2}{A\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{2}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}},$$

$$\int e^{-\frac{2Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^2 \cdot x\,dx\sqrt{x} =$$

$$\frac{3\tau^3}{2A^2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}-\frac{2}{9\sqrt{3}}+\frac{1}{16\sqrt{4}}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}},$$

$$\int e^{-\frac{2Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^2 \cdot x^2\,dx\sqrt{x} =$$

$$\frac{15\tau^4}{4A^3\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left(\frac{1}{8\sqrt{2}}-\frac{2}{27\sqrt{3}}+\frac{1}{64\sqrt{4}}\right),$$

$$\int e^{-\frac{3Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)\frac{dx}{x\sqrt{x}} = -2A\sqrt{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\,(\sqrt{3}-\sqrt{4})$$

$$\int e^{-\frac{3Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}} = \tau\sqrt{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right),$$

$$\int e^{-\frac{3Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)dx\sqrt{x} = \frac{\tau^2}{A\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{4\sqrt{4}}\right),$$

$$\int e^{-\frac{3Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)xdx\sqrt{x} = \frac{3\tau^3}{2A^2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left(\frac{1}{9\sqrt{3}}-\frac{1}{16\sqrt{4}}\right),$$

$$\int e^{-\frac{3Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)x^2dx\sqrt{x} = \frac{15\tau^4}{4A^3\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left(\frac{1}{27\sqrt{3}}-\frac{1}{64\sqrt{4}}\right),$$

$$\int e^{-\frac{3Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)x^3dx\sqrt{x} = \frac{105\tau^5}{8A^4\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left(\frac{1}{81\sqrt{3}}-\frac{1}{256\sqrt{4}}\right)$$

$$\int e^{-\frac{5Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)x^4dx\sqrt{x} = \frac{945\tau^6}{16A^5\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left(\frac{1}{243\sqrt{3}}-\frac{1}{1024\sqrt{4}}\right),$$

$$\int e^{-\frac{3Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)x^5dx\sqrt{x} = \frac{10395\tau^7}{32A^6\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left(\frac{1}{729\sqrt{3}}-\frac{1}{4096\sqrt{4}}\right),$$

$$\int e^{-\frac{4Ax}{\tau}}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{\tau\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}$$

$$\int e^{-\frac{4Ax}{\tau}} dx\sqrt{x} = \frac{\tau^2}{8A\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}},$$

$$\int e^{-\frac{4Ax}{\tau}} x\,dx\sqrt{x} = \frac{3\tau^3}{64A^2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}},$$

$$\int e^{-\frac{4Ax}{\tau}} x^2 dx\sqrt{x} = \frac{15\tau^4}{512A^3\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}},$$

$$\int e^{-\frac{4Ax}{\tau}} x^3 dx\sqrt{x} = \frac{105\tau^5}{4096A^4\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}},$$

$$\int e^{-\frac{4Ax}{\tau}} x^4 dx\sqrt{x} = \frac{945\tau^6}{32768A^5\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}},$$

$$\int e^{-\frac{4Ax}{\tau}} x^5 dx\sqrt{x} = \frac{10395\tau^7}{262144A^6\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}},$$

$$\int e^{-\frac{4Ax}{\tau}} x^6 dx\sqrt{x} = \frac{1.3\ldots13\tau^8}{87.A^7\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}},$$

$$\int e^{-\frac{4Ax}{\tau}} x^7 dx\sqrt{x} = \frac{1.3\ldots15\tau^{16}}{(8A)^8.\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}},$$

$$\int e^{-\frac{4Ax}{\tau}} x^8 dx\sqrt{x} = \frac{1.3\ldots17\tau^{10}}{(8A)^9\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}},$$

atque generatim omnino

$$\int e^{-\frac{pAx}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^m \frac{dx}{x^n \sqrt{2}} =$$

$$\frac{(-2A)^n.\sqrt{2}}{1.3\ldots(2n-1).\tau^{n-1}}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left\{\begin{array}{l} p^{n-1}\sqrt{p} - m(p+1)^{n-1}\sqrt{(p+1)} \\ + \frac{m.\overline{m-1}}{2}(p+2)^{n-1}\sqrt{(p+2)} \\ - \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2.3}(p+3)^{n-1}\sqrt{(p+3)} \end{array}\right\},$$

$$\int e^{-\frac{pAx}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^m x^n\, dx\sqrt{x} =$$

$$\frac{1.3\ldots(2n+1).\tau^{n+2}\sqrt{2}}{(2A)^{n+1}}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{p^{n+1}.\sqrt{p}} - \frac{m}{(p+1)^{n+1}.\sqrt{(p+1)}} \\ + m.\frac{m-1}{2}.\frac{1}{(p+2)^{n+1}.\sqrt{(p+2)}} \\ - m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}\frac{1}{(p+3)^{n+1}.\sqrt{(p+3)}} \end{array}\right\},$$

prodibit adeo omnibus rite peractis

$$-\int \frac{5\,\eta^4\, d\varphi\,[\varphi(o)-\varphi]^3}{16\,x^3.\sqrt{2x}} =$$

$$\frac{\eta^4\Phi(o)^4}{2\tau^3}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left\{\begin{array}{l}\frac{A^3(A-B)}{3}(16\sqrt{4}-3.9\sqrt{3}+3.4\sqrt{2}-1)\\ +\frac{5A^2(AB-2C)}{6}(1-3.2\sqrt{2}+3.3\sqrt{3}-4\sqrt{4})\\ +\frac{5A(AC-3D)}{4}(\sqrt{4}-3.\sqrt{3}+3.\sqrt{2}-1)\\ +\frac{AD}{8}\left(1-\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\end{array}\right.$$

$$-\frac{\eta^4\Phi(o)^4}{2\tau^3}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left\{\begin{array}{l}\frac{5A^2B(A-B)}{2}(2\sqrt{2}-2.3\sqrt{3}+4\sqrt{4})\\ -\frac{15A(AB^2+AC-3BC)}{2}(\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{4})\\ +\frac{15(2ABC+AD-4BD-2C^2)}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\\ +\frac{15(2ABD+AC^2-5CD)}{16A}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{2}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}\right)\\ +\frac{15D(2AC-3D)}{32A^2}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}-\frac{2}{9\sqrt{3}}+\frac{1}{16\sqrt{4}}\right)\\ +\frac{225D^2}{64A^2}\left(\frac{1}{8\sqrt{2}}-\frac{1}{27\sqrt{3}}+\frac{1}{16\sqrt{4}}\right)\end{array}\right.$$

$$+\frac{\eta^4\varphi(o)^4}{2\tau^3}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{15AB^2(A-B)}{4}\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)\\[2ex]
+\dfrac{15B(2AC+AB^2-4BC)}{8}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}\right)\\[2ex]
+\dfrac{15(AC^2+2ABD+3AB^2C-5BC^2-5B^2D)}{16A}\left(\dfrac{1}{3\sqrt{3}}-\dfrac{1}{4\sqrt{4}}\right)\\[2ex]
+\dfrac{45(2ACD+3ABC^2+3AB^2D-11BCD-2C^3)}{32A^2}\left(\dfrac{1}{9\sqrt{3}}-\dfrac{1}{16\sqrt{4}}\right.\\[2ex]
+\dfrac{1575(3ABD^2+3AC^2D-8CD^2)}{128A^4}\left(\dfrac{1}{81\sqrt{3}}-\dfrac{1}{256\sqrt{4}}\right)\\[2ex]
+\dfrac{225(6ABCD+AC^3+AD^2-7BD^2-7C^2D)}{64A^3}\left(\dfrac{1}{27\sqrt{3}}-\dfrac{1}{64\sqrt{4}}\right.\\[2ex]
+\dfrac{42525D^2(AC-D}{256A^5}\left(\dfrac{1}{243\sqrt{3}}-\dfrac{1}{1024\sqrt{4}}\right)\\[2ex]
+\dfrac{155925D}{512A^5}\left(\dfrac{1}{729\sqrt{3}}-\dfrac{1}{4096\sqrt{4}}\right)
\end{array}\right.$$

$$-\frac{\eta^4\varphi(o)^4}{2\tau^3}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{5B^3(A-B)}{16}+\dfrac{5B^2(3AC+AB^2-5BC)}{128A}\\[2ex]
+\dfrac{15B(3AC^2+3ABD+4AB^2C-9BC^2-6B^2D)}{1024A^2}\\[2ex]
+\dfrac{75\left\{\begin{array}{l}6ABCD+4AB^3D+6AB^2C^2\\+AC^3-21B^2CD-7BC^3\end{array}\right\}}{8192A^3}
\end{array}\right\}$$

$$-\frac{\eta^4\varphi(o)^4}{2\tau^3}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left\{\begin{array}{l}
+\dfrac{525\left\{\begin{array}{l}3ABD^2+3AC^2D+12AB^2CD\\+4ABC^3-12B^2D^2-24BC^2D-2C^4\end{array}\right\}}{65536\,A^4}\\[2ex]
+\dfrac{4725\left\{\begin{array}{l}3ACD^2+6AB^2D^2+12ABC^2D\\+AC^4-9C^3D-27BCD^2\end{array}\right\}}{524288\,A^5}\\[2ex]
+\dfrac{51975D(12ABCD+4AC^3+AD^2-10BD^2-15C^2D)}{4194304A^6}\\[2ex]
+\dfrac{5.1.3\ldots13(6AC^2+4ABD-11CD)D^2}{16(8A)^7}\\[2ex]
+\dfrac{5.1.3.5\ldots15.D^3(4AC-3D)}{2.8^9.A^8}\\[2ex]
+\dfrac{5.1.3.5\ldots17\,D^4}{2.8^{10}.A^9}
\end{array}\right\}$$

ubi videlicet tenendum est esse

$16\sqrt{4}-3.9\sqrt{3}+3.4\sqrt{2}-1=1.205191$ . . Log. $=0.0810559$

$4\sqrt{4}-3.3\sqrt{3}+3.2\sqrt{2}-1=-0.1031759$ . . . $9.0135782$

$\sqrt{4}-3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-1=+0.0464883$ . . . . . $8.6673437$

$\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{3}{\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{2}}-1=-0.3607305$ . . . . $9.5571829$

$2\sqrt{2}-2.3\sqrt{3}+4\sqrt{4}=+0.4361223$ . . Log. $=9.6396083$

$\sqrt{2}-2.\sqrt{3}+\sqrt{4}$ . . $-0.0498889$ . . . . $8.6979874$

$\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}$ . . $+0.05240625$ . . . . $8.7193831$

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}}$ . . | + 0.0936532 . . . . | 8.9715226 |
| $\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{2}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{16\sqrt{4}}$ . . | + 0.0797266 . . . . | 8.9016032 |
| $\frac{1}{8\sqrt{2}} - \frac{2}{27\sqrt{3}} + \frac{1}{64\sqrt{4}}$ | + 0.0534341 . . . . | 8.7278185 |
| $\sqrt{4} - \sqrt{3}$ . . . . . | + 0.2679492 . . . . | 9.4280525 |
| $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}$ . . . . . | + 0.0773503 . . . . | 8.8884620 |
| $\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{4}}$ . . . . | + 0.0674501 . . . . | 8 8289827 |
| $\frac{1}{9\sqrt{3}} - \frac{1}{16\sqrt{4}}$ . . . | + 0.032900 . . . . | 8.5171959 |
| $\frac{1}{27\sqrt{3}} - \frac{1}{64\sqrt{4}}$ . . . | + 0.0135708 . . . . | 8.1326054 |
| $\frac{1}{81\sqrt{3}} - \frac{1}{256\sqrt{4}}$ . . . | + 0.0051746 . . . . | 7.7138768 |
| $\frac{1}{243\sqrt{3}} - \frac{1}{1024\sqrt{4}}$ . . | + 0.0018876 . . . . | 7.2759160 |
| $\frac{1}{729\sqrt{3}} - \frac{1}{4096\sqrt{4}}$ . . | + 0.0006699 . . . . | 6.8260100 |

atque pro primo quidem paragraphi 49:næ casu

| | | |
|---|---|---|
| $A - B$ . . . . . | + 0.8217822 . . . . | 9.9147568 |
| $AB - 2C$ . . . . . | + 0.7108277 . . . . | 9.8517643 |

| | | |
|---|---|---|
| $AC + AB^3 - 3BC$ . . . | + 0.2702557 . . . | 9.4317749 |
| $2ABC - 2C^2$ . . . . . | — 0.0837530 . . . | 8.9230004 |
| $2ABC + AB^3 - 4B^2C$. . | + 0.0987585 . . . | 8.9945745 |
| $AC^2 + 3AB^2C - 5BC^2$ | — 0.0556384 . . . | 8.7453746 |
| $3ABC^2 - 2C^3$ . . . . | + 0.0078714 . . . | 7.8960520 |
| $3AC + AB^2 - 5BC$ . . | + 0.1637134 . . . | 9.2140842 |
| $3AC^2 + 4AB^2C - 9BC^2$ . | — 0.0697042 . . . | 8.8432590 |
| $6A^2B + AC - 7BC$ . . | + 1.297810 . . . | 0.1132111 |
| $4AB - 2C$. . . . . | + 2.454368 . . . . | 0.3899396 |
| $A$ . . . . . | + 1.2769231 . . . . | 0.1061647 |
| $B$ . . . . . | + 0.4551409 . . . . | 9.6581459 |
| $C$ . . . . . | — 0.0648239 . . . . | 8.8117351 |
| $\frac{\eta^4 \cdot \varphi(o)^4}{2\tau^3}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}$. . . | + 9″.292279 . . . . | 0.9681222 |

Ex quibus denique sic allatis, pro hoc eodem casu, sequens obtinebimus computationis diagramma

| | |
|---|---|
| Log. $A^3(A-B)$ . . . . . | 0.2332509 |
| Log. $\frac{1}{3}(16\sqrt{4} - 27\sqrt{3} + 12\sqrt{2} - 1)$ | 9.6039346 |
| | 0.9681222 |
| | 0.8053077 . . + 6″.387 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log. $A^2(AB-2C)$ . . . . | 0.0640937 | | |
| Log. $\frac{5}{6}$ . . . . . | 9.9208187 | | |
| Log.$(1-3.2\sqrt{2}+3.3\sqrt{3}-4\sqrt{4})$ | 9.0135782 | | |
| | 0.9681222 | | |
| | 9.9666128 | . . . + | 0″926 |
| | | + | 7″.313 |
| Log. $A^2C$ . . . . . | 9 0240645 | | |
| Log. $\frac{5}{4}$ . . . . . | 0.0969100 | | |
| Log.$(\sqrt{4}-3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-1)$ | 8.6673437 | | |
| | 0.9681222 | | |
| | 8.7564404 | . . — | 0″.057 |
| | | + | 7″.256 |
| Log. $A^2B(A-B)$ . . . . . | 9.7852321 | | |
| Log. $\frac{5}{2}$ . . . . . | 0.3979400 | | |
| Log.$(2\sqrt{2}-2.3\sqrt{3}+4\sqrt{4})$ | 9.6396083 | | |
| | 0.9681222 | | |
| | 0.7909026 | . . — | 6″179 |
| | | + | 1″.077 |

Log. $A(AC + AB^2 - 3BC)$ . . 9.5379396

Log. $\frac{15}{2}(\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + +4)$. . 9.5730487

0.9681222

0.0791105 . . — 1″.200

— 0″.123

Log. $(2ABC - 2C^2)$ . . . . 8.9230001

Log. $\frac{15}{8}$ . . . . . 0.2730013

Log. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right)$ . . 8.7193831

0.9681222

8.8835070 . . . + 0.076

— 0″.047

Log. $C^2$ . . . . . 7.6234702

Log. $\frac{15}{16}$ . . . . . 9.9719713

Log. $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}}\right)$ 8.9715226

0.9681222

7.5350863 . . . — 0″005

— 0″050

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log. $AB^2(A-B)$ . . . . . | 9.3372133 | | |
| Log. $\frac{15}{4}(\sqrt{4}-\sqrt{3})$ . . . . | 0.0020838 | | |
| | 0.9681222 | | |
| | 0.3074193 . . . | + | 2″.030 |
| | | + | 1″.980 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log. $B(2AC+AB^2-4BC)$ . . | 8.9945745 | | |
| Log. $\frac{15}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)$ . . . | 9.1614633 | | |
| | 0.9681222 | | |
| | 9.1241600 . . | + | 0″133 |
| | | + | 2″.113 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log. $C(AC+3AB^2-5BC)$ . . | 8.7453746 | | |
| Compl. Log. $A$ . . . . . | 9.8938353 | | |
| Log. $\frac{15}{16}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{4\sqrt{4}}\right)$ . . | 8.8009540 | | |
| | 0.9681222 | | |
| | 8.4082861 . . . | — | 0″.026 |
| | | + | 2″.087 |

| | | |
|---|---|---|
| Log. $(3ABC^2 - 2C^3)$ . . . . | 7.8960520 | |
| Compl. Log. $A^2$ . . . . . | 9.7876706 | |
| Log. $\frac{45}{32}\left(\frac{1}{9\sqrt{3}} - \frac{1}{16\sqrt{4}}\right)$ . . | 8.6652584 | |
| | 0.9681222 | |
| | 7.3171032 . . | + 0″.002 |
| | | + 2″.089 |
| Log. $B^3(A - B)$ . . . . . | 8.8891945 | |
| Log. $\frac{5}{16}$ . . . . . | 9.4948500 | |
| | 0.9681222 | |
| | 9.3521667 . . . | — 0″.225 |
| | | + 1″.864 |
| Log. $B^2(3AC + AB^2 - 5BC)$ . . | 8.5303760 | |
| Compl. Log. $A$ . . . . . | 9.8938353 | |
| Log. $\frac{5}{128}$ . . . . . | 8.5917600 | |
| | 0.9681222 | |
| | 7.9840935 . . | — 0″.010 |
| | | + 1″.854 |
| Log. $B(3AC^2 + 4AB^2C - 9BC^2)$ | 8.5014049 | |
| Compl. Log. $A^2$ . . . . . | 9.7876706 | |
| Log. $\frac{15}{1024}$ . . . . . | 8.1657913 | |
| | 0.9681222 | |
| | 7.4229890 | + 0″.003 |
| | | + 1″.857 |

Ideoque terminos negligendo, quorum valores numerici ne millesimam quidem conficiunt minuti secundi partem, quartus adeo pro refractione horizontali determinanda terminus = + 1″.857; summaque quatuor primorum terminorum = 34′36″050

§. 55.

Quamquam in antecedentibus coëfficientem $D$ revera assumsimus nihilo æqualem, tamen, ne formula deficeret, si vel dato cuilibet numero æqualis sumeretur, rem huc usque generaliter omnino absolvere voluimus. At, cum profecto immensi admodum laboris evaderet ulteriores etiam terminos eadem prosequi plenitudine, facile nobis concedendum esse arbitrati sumus, pro his tantum coëfficientes respexisse $B$ et $C$; et quidem, cum vel termini, qui per $C^2$ fuerint multiplicandi, ne millesimam quidem valerent conficere minuti secundi partem, liceat adeo omnes rejicere terminos, qui altioribus afficiantur ipsius $C$ potestatibus. Tum vero, cum terminos scilicet negligendo, qui præ cæteris evanescere sint censendi, quintum adeo liceat differentialis terminum statuere

$$= \frac{-35\eta^5 K^4 d\Phi}{8H^4\sqrt{H}} = \frac{-35\eta^5 d\Phi}{128x^4\sqrt{2x}}\,[\Phi(o) - \Phi]^4,$$

fiet utique evolutione facta

$$\frac{-35\eta^5 d\varphi\,[\varphi(o)-\varphi]^4}{128x^4.\sqrt{2x}} =$$

$$+\frac{35\eta^5\varphi(o)^5}{128\tau\sqrt{2}}\left\{\frac{A-B}{x^4\sqrt{x}}+\frac{AB-2C}{\tau x^3\sqrt{x}}+\frac{AC}{\tau^2x^2\sqrt{x}}\right\}.e^{-\frac{Ax}{\tau}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^4}dx$$

$$-\frac{35\eta^5\varphi(o)^5}{32\tau\sqrt{2}}\left\{\begin{matrix}\frac{B(A-B)}{\tau x^3\sqrt{x}}+\frac{2ABC}{\tau^3x\sqrt{x}}\\+\frac{AB^2+AC-3BC}{\tau^2x^2\sqrt{x}}\end{matrix}\right\}.e^{-\frac{2Ax}{\tau}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^3}dx$$

$$+\frac{105\eta^5\varphi(o)^5}{64\tau\sqrt{2}}\left\{\begin{matrix}\frac{B^2(A-B)}{\tau^2x^2.\sqrt{x}}+\frac{3AB^2C}{\tau^4.\sqrt{x}}\\+\frac{B(AB^2+2AC-4BC)}{\tau^3x.\sqrt{x}}\end{matrix}\right\}.e^{-\frac{3Ax}{\tau}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^2}dx$$

$$-\frac{35\eta^5\varphi(o)^5}{32\tau\sqrt{2}}\left\{\begin{matrix}\frac{B^3(A-B)}{\tau^3x\sqrt{x}}+\frac{4AB^3C\sqrt{x}}{\tau^5}\\+\frac{B^2(AB^2+3AC-5BC)}{\tau^4\sqrt{x}}\end{matrix}\right\}.e^{-\frac{4Ax}{\tau}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)}dx$$

$$+\frac{35\eta^5\varphi(o)^5}{128\tau\sqrt{2}}\left\{\begin{matrix}\frac{B^4(A-B)}{\tau^4\sqrt{x}}+\frac{5AB^4C}{\tau^6}x\sqrt{x}\\+\frac{B^3.(AB^2+4AC-6BC)}{\tau^5}\sqrt{x}\end{matrix}\right\}.e^{-\frac{5Ax}{\tau}}$$

Ideoque, cum integralibus ita sumendis ut evanescant in hypothesi $x = 0$, tum vero ponendo $x = \infty$, sit

$$\int e^{-\frac{Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^4 \frac{dx}{x^4\sqrt{x}} =$$

$$\frac{16A^4\sqrt{2}}{105\tau^3}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\,(1-4.8\sqrt{2}+6.27\sqrt{3}-4.64\sqrt{4}+125\sqrt{5})$$

$$\int e^{-\frac{Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^4 \cdot \frac{dx}{x^3\sqrt{x}} =$$

$$-\frac{8A^3\sqrt{2}}{15\tau^2}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\,(1-4.4\sqrt{2}+6.9\sqrt{3}-4.16\sqrt{4}+25\sqrt{5})$$

$$\int e^{-\frac{Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^4 \frac{dx}{x^2\sqrt{x}} =$$

$$\frac{4A^2\sqrt{2}}{3\tau}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}(1-4.2\sqrt{2}+6.3\sqrt{3}-4.4\sqrt{4}+5\sqrt{5}),$$

$$\int e^{-\frac{2Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^3 \cdot \frac{dx}{x^3\sqrt{x}} =$$

$$-\frac{8A^3\sqrt{2}}{15\tau^2}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\,(4\sqrt{2}-3.9\sqrt{3}+3.16\sqrt{4}-26\sqrt{5}),$$

$$\int e^{-\frac{2Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^3 \cdot \frac{dx}{x^2\sqrt{x}} =$$

$$\frac{4A^2\sqrt{2}}{3\tau}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\,(2\sqrt{2}-3.3\sqrt{3}+3.4\sqrt{4}-5\sqrt{5}),$$

$$\int e^{-\frac{2Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^3 \cdot \frac{dx}{x\sqrt{x}} =$$

$$\frac{-2A\sqrt{2}}{1}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\,(\sqrt{2}-3\sqrt{3}+3\sqrt{4}-\sqrt{5}),$$

$$\int e^{-\frac{3Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^2 \cdot \frac{dx}{x^2 dx} =$$

$$\frac{4A^2\sqrt{2}}{3\tau}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\,(3\sqrt{3}-2.4\sqrt{4}+5\sqrt{5}),$$

$$\int e^{-\frac{3Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^2 \cdot \frac{dx}{x\sqrt{x}} =$$

$$\frac{-2A\sqrt{2}}{1}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\,(\sqrt{3}-2\sqrt{4}+\sqrt{5}),$$

$$\int e^{-\frac{3Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$\tau\sqrt{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

$$\int e^{-\frac{4Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)\cdot\frac{dx}{x\sqrt{x}}=\frac{-2A\sqrt{2}}{1}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\,(\sqrt{4}-\sqrt{3}),$$

$$\int e^{-\frac{4Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}=\tau\sqrt{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left(\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

$$\int e^{-\frac{4Ax}{\tau}}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\tau}}\right)\cdot dx\sqrt{x}=\frac{\tau^2}{A\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left(\frac{1}{4\sqrt{4}}-\frac{1}{5\sqrt{5}}\right),$$

$$\int e^{-\frac{5Ax}{\tau}}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{\tau\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}},$$

$$\int e^{-\frac{5Ax}{\tau}}dx\sqrt{x}=\frac{\tau^2}{5A\sqrt{10}}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}};$$

et

$$\int e^{-\frac{5Ax}{\tau}}x\,dx\sqrt{x}=\frac{3\tau^3}{50A^2\sqrt{10}}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}$$

ex quibus adeo tandem prodibit

$$-\int\frac{35\eta^5\,d\varphi\,[\varphi(o)-\varphi]^4}{128x^4\cdot\sqrt{2x}}=$$

$$\frac{\eta^5\cdot\varphi(o)^5}{24\tau^4}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left\{\begin{array}{l}A^4(A-B)(1-4.8\sqrt{2}+6.27\sqrt{3}-4.64\sqrt{4}+125\sqrt{5})\\-\frac{7A^3(AB-2C)}{2}(1-4.4\sqrt{2}+6.9\sqrt{3}-4.16\sqrt{4}+25\sqrt{5})\\+\frac{35A^3C}{4}(1-4.2\sqrt{2}+6.3\sqrt{3}-4.4\sqrt{4}+5\sqrt{5})\end{array}\right\}$$

$$-\frac{\eta^5.\varphi(o)^5}{4\tau^4}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left\{\begin{array}{l} -\frac{7A^3B(A-B)}{3}\,(4\sqrt{2}-3.9\sqrt{3}+3.16\sqrt{4}-25\sqrt{5}) \\ +\frac{35A^2(AB^2+AC-3BC)}{6}\,(2\sqrt{2}-3.3\sqrt{3}+3.4\sqrt{4}-5\sqrt{5}) \\ -\frac{35A^3BC}{2}\,(\sqrt{2}-3.\sqrt{3}+3.\sqrt{4}-\sqrt{5}) \end{array}\right\}$$

$$+\frac{35\eta^5.\varphi(o)^5}{16\tau^4}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left\{\begin{array}{l} A^2B^2(A-B)\,(3\sqrt{3}-2.4\sqrt{4}+5\sqrt{5}) \\ -\frac{3AB(AB^2+2AC-4BC)}{2}\,(\sqrt{3}-2\sqrt{4}+\sqrt{5}) \\ +\frac{9AB^2C}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \end{array}\right\}$$

$$-\frac{35\eta^5.\varphi(o)^5}{16\tau^4}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left\{\begin{array}{l} AB^3(A-B)\,(\sqrt{5}-\sqrt{4})+B^3C\left(\frac{1}{4\sqrt{4}}-\frac{1}{5\sqrt{5}}\right) \\ +\frac{1}{2}B^2(3AC+AB^2-5BC)\left(\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \end{array}\right\}$$

$$+\frac{7\eta^5.\varphi(o)^5}{128\tau^4}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}\left(\frac{5B^4(A-B)}{\sqrt{5}}+\frac{7B^3(AB^2+4AC-6BC}{2A\sqrt{5}}+\frac{21B^4C}{4A\sqrt{5}}\right)$$

$1-4.8\sqrt{2}+6.27\sqrt{3}$
$-4.64\sqrt{4}+125\sqrt{5}$ . . $+3.8455882$ . . . $0.5849627$

$1-4.4\sqrt{2}+6.9\sqrt{3}$
$-4.16\sqrt{4}+25\sqrt{5}$ . . $-0.1951269$ . . . $9.2903171$

| | | |
|---|---|---|
| $1-4.2\sqrt{2}+6.3\sqrt{3}$<br>$-4.4\sqrt{4}+5\sqrt{5}$ | + 0.0434694 | 8.6381836 |
| $4\sqrt{2}-3.9\sqrt{3}+$<br>$3.16\sqrt{4}-25\sqrt{5}$ | — 1.0101788 | 0.0043983 |
| $2\sqrt{2}-3.3\sqrt{3}+$<br>$3.4\sqrt{4}-5\sqrt{5}$ | + 0.0596491 | 8.7756039 |
| $\sqrt{2}-3\sqrt{3}+3\sqrt{4}-\sqrt{5}$ | — 0.0179973 | 8.2552074 |
| $3\sqrt{3}-2.4\sqrt{4}+5\sqrt{5}$ | + 0.3764923 | 9.5757561 |
| $\sqrt{3}-2\sqrt{4}+\sqrt{5}$ | — 0.0318812 | 8.5035346 |
| $\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}$ | + 0.0245639 | 8.3902973 |
| $\sqrt{5}-\sqrt{4}$ | + 0.2360680 | 9.3730371 |
| $\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{5}}$ | + 0.0527864 | 8.7225221 |
| $\frac{1}{4\sqrt{4}}-\frac{1}{5\sqrt{5}}$ | + 0.0355573 | 8.5509288 |

tum vero ex his sequens obtinebimus diagramma

| | | |
|---|---|---|
| Log. $A^4(A-B)$ | 0.3394156 | |
| L. $(1-32\sqrt{2}+162\sqrt{3}$<br>$-256\sqrt{4}+125\sqrt{5})$ | 0.5849627 | |
| Log. $\frac{\eta^5.\varphi(o)^5}{24\tau^4}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}$ | 9.2272282 | |
| | 0.1516065 | + 1″.418 |

| | | |
|---|---|---|
| Log. $A^3(AB-2C)$ . . . . . | 0.1702584 | |
| Log. $(1-16\sqrt{2}+54\sqrt{3}-64\sqrt{4}+25\sqrt{5})$ . . | 9.2903171 | |
| Log. $\frac{7}{2}$ . . . . . | 0.5440680 | |
| | 9.2272282 | |
| | 9.2318717 . . . | + 0″.171 |
| | | + 1″.589 |
| Log. $A^3C$ . . . . . | 9.1302292 | |
| Log. $\frac{35}{4}$ . . . . . | 0.9420080 | |
| Log. $(1-8\sqrt{2}+18\sqrt{3}-16\sqrt{4}+5\sqrt{5})$ . . . | 8.6381836 | |
| | 9.2272282 | |
| | 7.9376490 . . . | — 0″.009 |
| | | + 1″.580 |
| Log. $A^3B(A-B)$ . . . . . | 9.8913968 | |
| Log. $\frac{7}{3}$ . . . . . | 0.3679768 | |
| L.$(4\sqrt{2}-27\sqrt{3}+48\sqrt{4}-25\sqrt{5})$ | 0.0043983 | |
| Log. $\frac{\eta^5 \cdot \varphi(o)^5}{4\tau^4}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}$ . . . | 0.0053794 | |
| | 0.2691513 . . . | — 1″.858 |
| | | — 0″.278 |

| | | |
|---|---|---|
| Log. $A^2(AC+AB^2-3BC)$ . . | 9.6441043 | |
| L. $2\sqrt{2}-3.3\sqrt{3}+3.4\sqrt{4}-5\sqrt{5})$ | 8.7756039 | |
| Log. $\frac{35}{6}$ . . . . . | 0.7659168 | |
| | 0.0053794 | |
| | 9.1910044 . . | — 0″.155 |
| | | — 0″.433 |
| Log. $A^2BC$ . . . . . | 8.6822104 | |
| Log. $(\sqrt{2}-3\sqrt{3}+3\sqrt{4}-\sqrt{5})$ | 8.2552074 | |
| Log. $\frac{35}{2}$ . . . . . | 1.2430381 | |
| | 0.0053794 | |
| | 8.1858353 . . . | + 0″.015 |
| | | — 0″.418 |
| Log. $A^2B^2(A-B)$ . . . . | 9.4433780 | |
| Log. $(3\sqrt{3}-2.4\sqrt{4}+5\sqrt{5})$ . . | 9.5757561 | |
| Log. $\frac{35\eta^5\varphi(o)^5}{16\tau^4}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}$ . . | 0.9473875 | |
| | 9.9665216 . . | + 0″.926 |
| | | + 0″.508 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log. $AB(2AC + AB^2 - 4BC)$ . . | 9.1007392 | | |
| Log. $\frac{3}{2}(\sqrt{3} - 2\sqrt{4} + \sqrt{5})$ . . | 8.6796259 | | |
| | 0.9473875 | | |
| | 8.7277526 | : : + | 0″.053 |
| | | + | 0″.561 |
| Log. $AB^2C$ : . : : : . : | 8.2341916 | | |
| Log. $\frac{9}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ . . | 8.7424798 | | |
| | 0.9473875 | | |
| | 7.9240589 | . : : — | 0.008 |
| | | + | 0″.553 |
| Log. $AB^3(A - B)$ . . . : | 8.9953592 | | |
| Log. $(\sqrt{5} - \sqrt{4})$ . . : : . | 9.3730371 | | |
| | 0.9473875 | | |
| | 9.3157838 | : : : — | 0″207 |
| | | + | 0″.346 |
| Log. $B^2(3AC + AB^2 - 5BC)$ . . | 8.5303760 | | |
| Log. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ . . | 8.4214921 | | |
| | 0.9473875 | | |
| | 7.8992556 | : . — | 0″.008 |
| | | + | 0″.338 |

| | | |
|---|---|---|
| Log. $B^3C$ . . . . . | 7.7861728 | |
| Log. $\left(\frac{1}{4\sqrt{4}} - \frac{1}{5\sqrt{5}}\right)$ . . . | 8.5509288 | |
| | 0.9473875 | |
| | 7.2844891 . . | + 0″002 |
| | | + 0″340 |
| Log. $B^4(A-B)$ . . . . . | 8.5473404 | |
| Log. $\sqrt{5}$ . . . . . | 0.3494850 | |
| Log. $\frac{7\eta^5\varphi(o)^5}{128\tau^4}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}$ . . . | 9.3453275 | |
| | 8.2421529 . . . | + 0″017 |
| | | + 0″.357 |
| Log. $B^3(AB^2+4AC-6BC)$ . . | 8.0175739 | |
| Log. $\frac{7}{2}$ . . . . . | 0.5440680 | |
| Compl. Log. $A\sqrt{5}$ . . . . . | 9.5443503 | |
| | 9.3453275 | |
| | 7.4513197 | + 0″003 |

unde patet quintum adeo terminum prodire = + 0″360, summamque primorum quinque terminorum = 34′ 36″.410.

§. 56.

Jam quod ipsum approximandi opus ad centesimam usque minuti secundi partem continuatum in antecedentibus exhibuimus, nequaquam existimandi sumus hoc ipso indicatum voluisse, vel hanc, vel aliam quamlibet ejusdem quantitatis determinationem numericam intra arctos adeo limites pro certa esse habendam; quippe cum id solummodo spectavimus, ut, quid ex allata in paragrapho 56:ta de constitutione atmosphæræ hypothesi, pro hoc argumento consequeretur, omni illo, quem adhibitæ vulgo tabulæ logarithmicæ concedunt rigore, enucleatum sisteremus, quo nempe sic tuto aliquatenus judicare liceat de hujusce hypotheseos cum ipsa rerum natura convenientia, vel ab eadem discrepantia. Tum vero magnopere est dolendum exiguam admodum esse copiam determinationum pro hac eadem quantitate ex observationibus unice colligendarum, quibus scilicet nihil adhæreat indeterminati, sive temperaturam quod attinet, sive huic eidem convenientem Barometri altitudinem. Interim Groombridgii determinationem, quamvis ne hanc quidem omnibus, quæ heic profecto desideranda essent, absolute satisfacientem, attamen præ cæteris qualicunque saltem comparationi instituendæ idoneam, ex Transactionibus Philosophicis pro

anno 1814 attulisse juvat, ex qua nempe refractio horizontalis = 34′28″13, idque pro temperatura ex thermometro Fahrentiano interiore quidem = + 49°, exteriore autem = + 45°, atque Barometro altitudinem obtinente = 29.6 pollicibus anglicanis. Hoc autem agentibus primum sane omnium animadvertendum occurrit allatam Barometri altitudinem ad temperaturam glaciei liquantis pro hydrargyro reductam esse = $750^{mm}.5493$; ideoque coëfficientem pro valore $\eta$ ad casum Groombridgii reducendo fore

$$\frac{750.5493}{760} \cdot \frac{498}{493} = 0.9975807 \quad . \quad . \quad . \quad 9'.9989480$$

quæ quidem si determinatæ ex formula nostræ adhibeatur refractioni, prodibit denique

$$2076''.41 \times 0.995684 = 2071''.386 = 34'31''.386$$

Equidem pro re, de qua agitur, perparva omnino existimanda est hujusce quantitatis, ab observata, discrepantia; neque profecto levissimum judicavimus hoc ipsum suppeditare momentum, ad fidem valoribus conciliandam, quos in antecedentibus exhibuimus, sive pro temperatura spatiorum coelestium, sive denique pro coëfficientibus *A*; *B* et *C*. Neque tamen me fugit, non isthanc sufficere rationem pro refractionibus, quæ in horizontis valeant vici-

niis, ab uno in alium atmosphæræ statum transferendis; sed cum ipsum Groombridgium, in observationibus ad communem atmosphæræ statum reducendis, hac eadem usum esse verosimillimum sit, eandem heic quoque comparationis ergo adhibendam fuisse profecto patebit

## §. 57.

Equidem pro re, de qua agitur sufficere nobis in antecedentibus ea visa est valorem ipsius $C$, proxime adeo, ut refractionum Astronomicarum satisfaciat phænomenis, determinandi ratio, qua statuendo

$$\varphi = \varphi(o) \cdot e^{-\frac{Ax}{\tau}} v$$

factorem assumsimus

$$v = 1 + B\left(\frac{x}{\tau}\right) + C\left(\frac{x}{\tau}\right)^2;$$

Sed et quotcunque considerare lubeat terminos, quibus valorem exhibeamus ipsius

$$v = 1 + B\left(\frac{x}{\tau}\right) + C\left(\frac{x}{\tau}\right)^2 + D\left(\frac{x}{\tau}\right)^3 + \&c.;$$

licebit utique convenientes datæ cuilibet functioni $\psi$ omnes coëfficientium $A$, $B$, $C$ et $D$ valores sic determinare. Ex æquatione (54) cum sit

$$\tau\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = \frac{\alpha - \psi}{2\psi - \alpha},$$

fiet iterum differentiando

$$\tau\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right) = \frac{-\alpha}{(2\psi-\alpha)^2} \cdot \left(\frac{d\psi}{dx}\right),$$

ideoque $\tau^2\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right) = \frac{-\alpha(\alpha-\psi)}{(2\psi-\alpha)^3}$.

Rursus, cum sit per æquationem (17)

$$\tau\psi\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \tau\varphi\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = -\varphi,$$

et inde per hujusce differentiationem

$$\tau\psi\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) + 2\tau\left(\frac{d\psi}{dx}\right)\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \tau\varphi\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right) = -\left(\frac{d\varphi}{dx}\right),$$

unde, cum $1 + 2\tau\left(\frac{d\psi}{dx}\right)$ sit $= \frac{\alpha}{2\psi-\alpha}$,

et $1 + \tau\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = \frac{\psi}{2\psi-\alpha}$,

nec non $\tau\psi\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = -\varphi\left\{1 + \left(\frac{d\psi}{dx}\right)\right\} = -\frac{\varphi\psi}{2\psi-\alpha}$,

et inde $\tau\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = -\frac{\varphi}{2\psi-\alpha}$,

fiet adeo $\tau^2\psi\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) - \frac{\alpha\varphi}{(2\psi-\alpha)^2} - \frac{\alpha(\alpha-\psi)\varphi}{(2\psi-\alpha)^2} = 0$,

hoc est $$\tau^2 \psi \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) - \frac{\alpha\psi\varphi}{(2\psi-\alpha)^3} = 0,$$

vel denique $$\tau^2 \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) = \frac{\alpha\varphi}{(2\psi-\alpha)^3}$$

Sed et cum ex æquatione

$$\varphi = \varphi(o) . e^{-\frac{Ax}{\tau}} v$$

per differentiationem prodeat

$$d\varphi = \varphi(o) . e^{-\frac{Ax}{\tau}} \left(dv - \frac{A}{\tau}\right) v\,dx, \quad \text{et}$$

$$d^2\varphi = \varphi(o) . e^{-\frac{Ax}{\tau}} \left(d^2 v - \frac{2A}{\tau} dx\,dv + \frac{A^2}{\tau^2} v\,dx^2\right);$$

denotante autem $\left(\frac{d^n V}{dx^n}\right)$ valorem ipsius $\left(\frac{d^n v}{dx^n}\right)$,

et $\left(\frac{d^n \Phi}{dx^n}\right)$ valorem ipsius $\left(\frac{d^n \varphi}{dx^n}\right)$,

qui valori convenit $x = 0$, per demonstrata in antecedentibus sit

$$A = \frac{1}{\alpha}, \quad \text{atque} \quad V = 1,$$

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = \frac{B}{\tau}, \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2 V}{dx^2}\right) = \frac{2C}{\tau^2}$$

fiet adeo $\tau\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) = \varphi(o)\left\{\tau\left(\frac{dV}{dx}\right) - AV\right\}$,

et inde $\frac{1}{2\psi(o) - \alpha} = A - B = \frac{1}{\alpha} - B$,

sive denique $B = \frac{2}{\alpha}\left(\frac{\psi(o) - \alpha}{2\psi(o) - \alpha}\right)$;

atque sic, cum pro singulari ipsius $x$ valore $= o$,

$$\tau^2\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right) = \varphi(o)\left\{\tau^2\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right) - 2A\cdot\tau\left(\frac{dV}{dx}\right) + A^2V\right\}$$
$$= \varphi(o)\,[2C - 2AB + A^2],$$

fiet utique $2C = 2AB - A^2 + \frac{\alpha}{[2\psi(o) - \alpha]^3}$;

unde pro valore ipsius $\psi(o) = 1$, prodibit

$$C = -\,0.0167782\,, \quad \ldots \quad 9.2247454$$

tum vero terminos $Ex^4$, $Fx^5$, &c. negligendo, ex æquatione (45)

$$2AC + 6D = -\,0.1655503\,.$$

atque sic tandem $D = -\,0.0204497$; . . . 8.3106869

qui quidem ipsorum $C$ et $D$ valores si adhibeantur in æquatione (62), prodibit ex his

$$\frac{8A^3 - 4A^2B - 2AC - 3D}{8A^2} = 1.0573407 \quad \ldots \quad 0.0242159$$

$$\frac{4A^3 + 2A^2B + 3AC - 45D}{32A^3} = 0.1601095 \quad \ldots \quad 9.2044171$$

atque sic, pro primo quidem termino, isthoc calculi diagramma

| | | |
|---|---|---|
| Log. $\frac{\eta\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\tau A}}$ . . . . . | 3.2542906 | |
| | 0.0242159 | |
| | 3.2785065 . . . | 1898″.919 |
| Log. $\frac{\eta\sqrt{\tau\pi}}{\sqrt{2A}}$ . . . . . | 0.3674920 | |
| | 9.2044171 | |
| | 9.5719091 . . | + 0″.373 |
| | | 1899″.292 |

pro secundo autem termino obtinebitur

| | | |
|---|---|---|
| $A$ . . . . . | + 1.2769231 . . . | 0.1061647 |
| $B$ . . . . . | + 0.4551409 . . . | 9.6581459 |
| $C$ . . . . . | — 0.0167782 . . . | 8.2247454 |
| $D$ . . . . . | — 0.0204497 . . . | 8.3106869 |
| $A - B$ . . . . . | + 0.8217822 . . . | 9.9147568 |
| $AB - 2C$ . . . . . | + 0.6147363 . . . | 9.7886889 |
| $AC - 3D$ . . . . . | + 0.0399246 . . . | 8.6012405 |
| $2AC - 3D$ . . . . . | + 0.0185001 . . . | 8.2671719 |
| $AC + AB^2 - 3BC$ . . | + 0.2660036 . . . | 9.4248875 |
| $2ABC + AD - 4BD - 2C^2$ | — 0.0089480 . . . | 7.9517260 |
| $2ABD + AC^2 - 5CD$ . . | — 0.0251260 . . . | 8.4001234 |

| | | |
|---|---|---|
| $\eta^2 . \sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}$ . . . . | $+0''.5079012$ . . . . | 9.7057792 |
| $\eta^2 . \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}$ . . . . | $+ 391''3613$ . . . . | 2.5925778 |
| Log. $(A^2 - AB)$ . . . | 0.0209215 | |
| Log. $(\sqrt{2}-1)$ . . . . . | 9.6172245 | |
| | 2.5925778 | |
| | 2.2307238 . . . | $+ 170''.108$ |
| Log. $(AB - 2C)$ . . . . | 9.7886889 | |
| Log. $\frac{1}{4}(2 - \sqrt{2})$ . . . . | 9.1656795 | |
| | 2.5925778 | |
| | 1.5469462 . . . | $+ 35''.233$ |
| | | $+ 205''.341$ |
| Log. $(AC - 3D).\frac{1}{A}$ . . | 8.4950758 | |
| Log. $\frac{1}{16}(4 - \sqrt{2})$ . . . . | 9.2084726 | |
| | 2.5925778 | |
| | 0.2961262 . . . | $+ 1''.978$ |
| | | $+ 207''.319$ |
| Log. $\frac{D}{A}$ . . . . . | 8.2045222 | |
| Log. $\frac{3}{64}(8 - \sqrt{2})$ . . . . | 9.4895489 | |
| | 2.5925778 | |
| | 0.2866499 . . . | $- 1''.935$ |
| | | $+ 205.384$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log. $\frac{1}{A}(2ABC+AD-4BD-2C^2)$ | 7.9517260 | | |
| Log. $\frac{3}{32\sqrt{2}}$ . . . . . | 8.8214563 | | |
| | 2.5925778 | | |
| | 9.3657601 | . . + | 0″.232 |
| | | + | 205″.616 |
| Log. $(AB-B^2)$ . . . . . | 9.5729027 | | |
| Compl. Log. $2\sqrt{2}$ . . . . . | 9.5484550 | | |
| | 2.5925778 | | |
| | 1.7139355 | . . — | 51″.753 |
| | | + | 153″.863 |
| Log. $\frac{1}{A}(AC+AB^2-3BC)$ . . | 9.3187228 | | |
| Compl Log. $8\sqrt{2}$ . . . . . | 8.9463958 | | |
| | 2.5925778 | | |
| | 0.8576964 | . . — | 7″.206 |
| | | + | 146″.657 |
| Log. $\frac{1}{A3}2ABD+AC^2-5CD)$ | 8.0816293 | | |
| Log. $\frac{15}{128\sqrt{2}}$ . . . . . | 8.9183663 | | |
| | 2.5925778 | | |
| | 9.5925734 | . . + | 0″.391 |
| | | | 147″.048 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log. $\frac{1}{A^4}(2AC-3D)D$ . . . | 6.1532000 | | |
| Log. $\frac{105}{512\sqrt{2}}$ . . . . . | 9.1614043 | | |
| | 2.5925778 | | |
| | 7.9071821 . . | + | 0″.008 |
| | | + | 147″.056 |
| Log. $\frac{D^2}{A^4}$ . . . . . | 6.1967150 | | |
| Log. $\frac{945}{2048\sqrt{2}}$ . . . . . | 9.5135869 | | |
| | 2.5925778 | | |
| | 8.3028797 . . | — | 0″.020 |
| | | — | 147″.036 |
| Log. $(A-B)$ . . . . . | 9.9147568 | | |
| Log. $\frac{13}{16}(2-\sqrt{2})$ . . . . . | 9.6775626 | | |
| | 9.7057792 | | |
| | 9.2980986 . . | + | 0″.199 |
| | | + | 147″.235 |
| Log. $\frac{1}{A}(AB-2C)$ . . . . | 9.6825242 | | |
| Log. $\frac{13}{64}(4-\sqrt{2})$ . . . . . | 9.7203560 | | |
| | 9.7057792 | | |
| | 9.1086594 . . | + | 0″.128 |
| | | + | 147″.363 |

Log. $\frac{1}{A^2}(AC - 3D)$ . . . . 8.3889111

Log. $\frac{39}{256}(8 - \sqrt{2})$ . . . . 0.0014322

9.7057792

8.0961225 . . + 0″.012

+ 147″.375

Log. $\frac{D}{A^2}$ . . . . . 8.0983575

Log. $\frac{195}{1024}(16 - \sqrt{2})$ . . . 04436644

9.7057792

8.2478011 . . — 0″.018

—147″.357

Log. $\frac{1}{A}(AB - B^2)$ . . . . 9.4667380

Log. $\frac{13}{32\sqrt{2}}$ . . . . . 9.4582784

9.7057792

8.6307956 . . . — 0″.043

+147″.314

Log. $\frac{1}{A^2}(AC + AB^2 - 3BC)$ . . 9.2125581

Log. $\frac{39}{128\sqrt{2}}$ . . . . . 9.3333396

9.7057792

8.2516769 . . — 0″.018

+146″.296

| | | |
|---|---|---|
| Log. $\frac{1}{A^3}(2ABD + AC^2 - 5CD)$ | 8.0816293 | |
| Log. $\frac{1365}{2048\sqrt{2}}$ . . . . . | 9.6732878 | |
| | 9.7057792 | |
| | 7.4606963 . . . | + 0″.003 |
| | | + 146.299 |

atque sic summa primorum duorum terminorum = 34′5″.291

Pro tertio autem termino numerice determinando fiet

| | | |
|---|---|---|
| $2AC + AB^2 - 4BC$ . . | + 0.2522157 . . . | 9.4017721 |
| $AC^2 + 2ABD + 3AB^2C - 5BC^2 - 5B^2D$ . | — 0.0161836 . . . | 8.2090756 |
| $2ACD + 3ABC^2 + 3AB^2D - 2BCD - 2C^3 - 9BCD$ | — 0.0165693 . . . | 8.2193042 |
| $AD^2 + 6ABCD + AC^3 - BD^2 - 7C^2D - 6BD^2$ . . | + 0.0004324 . . . | 6.6358857 |
| $3ABD^2 + 3AC^2D - 8CD^2$ . . | + 0.0007633 . . . | 6.8826953 |
| $AC - D$ . . . . . | — 0.0009747 . . . | 6.9888932 |
| $\frac{\eta^3 \cdot \varphi(o)^3}{2\tau^2}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}$ . . . . | + 42″.64175 . . . | 1.6298350 |
| $\frac{\eta^3 \cdot \varphi(o)^3}{2\tau}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}$ . . . | + 0″055340 . . . . | 8.7430364 |
| Log. $A^2(A - B)$ . . . . . | 0.1270862 | |
| Log. $(3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 1)$ . . | 9.7318286 | |
| | 1.6298350 | |
| | 0.4887498 . . | + 30″.814 |

Log. $A(AB-2C)$ . . . . . 9.8948536

Log. $\frac{3}{2}(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)$ . . 9.1600625

1.6298350

0.6847511 . . . + 4″.839

+ 35″.653

Log. $AC-3D)$ . . . . . 8.6012405

Log. $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{2}}+1\right)$ . . 9.0876127

1.6298350

9.3186882 . . . + 0″208

+ 35″861

Log. $AD$ . . . . . 8.4168516

Log. $\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{2}{2\sqrt{2}}+1\right)$ .. 9.2600404

1.6298350

9.3067270 . . . — 0.203

+ 35″.658

Log. $3AB(A-B)$ . . . . . 0.1561887

Log. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ . . . . . 9.5022046

1.6298350

1.2882283 . . — 19″.419

+ 16″.239

Log. $(AC + AB^2 - 3BC)$ . . 9.4248875

Log. $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ . . . 9.2892207

1.6298350

0.3439432 . . . — 2″208

+ 14″.031

L. $(2ABC + AD - 4BD - 2C^2)\frac{1}{A}$ 8.0578907

Log. $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$ . . 9.0821649

1.6298350

8.7698906 . . . + 0″.059

+ 14″.090

Log. $(AC^2 + 2ABD - 5CD) \cdot \frac{1}{A}$ . . 8.1877940

Log. $\frac{9}{8}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{9\sqrt{3}}\right)$ . . . 9.1027934

1.6298350

8.9204224 . . . + 0″083

+ 14″.173

Log. $(2ACD - 3D^2)$ . . . . 6.2593647

Log. $\frac{45}{16}\left(\frac{1}{8\sqrt{2}} - \frac{1}{27\sqrt{3}}\right)$ . . 9.2751997

1.6298350

7.1643994 . . . + 0″001

+ 14″.174

Log. $\frac{D^2}{A^3}$ . . . . . 6.3028797

Log. $\frac{315}{32}\left(\frac{1}{16\sqrt{2}} - \frac{1}{81\sqrt{3}}\right)$ .. 9.5621410

1.6298350

7.4948557 . . . + 0″003

+ 14″.177

Log. $B^2(A-B)$ . . . . . 9.2310486

Log. $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ . . . . . 9.6365007

1.6298350

0.4973843 . . . + 3″.143

+ 17″.320

Log. $(2ABC + AB^3 - 4B^2C)\frac{1}{A}$ 8.9537533

Compl. Log. $8\sqrt{3}$ . . . . 8.8543494

1.6298350

9.4379377 . . . + 0″.273

+ 17″.593

L. $(AC^2 + 2ABD + 3AB^2C - 5BC^2 - 5B^2D)\frac{1}{A^2}$ . . 7.9967462

Compl. Log. $16\sqrt{3}$ . . . . 8.5533194

1.6298350

8.1799006 . . . — 0″015

+ 17″.578

Log. $\left.\begin{array}{l}(CD.(2A-11B)+\\ 3AB(C^2+BD)-2C^3).\end{array}\right\}\frac{1}{A^3}$ . . 7.9008091

Log. $\frac{5}{96\sqrt{3}}$ . . . . . 9.4781381

1.6298350

8.0087822 . . . — 0″.010

+ 17″.568

Log. $A(B-A)$ . . . . . 0.0209215

Log. $\frac{41}{8}(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)$ . . 9.6936651

8.7430364

8.4576230 . . + 0″.029

+ 17″.597

Log. $(AB-2C)$ . . . . . 9.7886889

Log. $\frac{41}{16}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{2}}+1\right)$ . . 9.6222153

8.7430364

8.1539406 . . + 0″.014

+ 17″.611

Log. $\frac{1}{A}(AC-3D)$ . . . . 8.4950748

Log. $\frac{41}{32}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{2}{2\sqrt{2}}+\right)$ . . 9.7936830

8.7430364

7.0317942 . . + 0″.001

+ 17″.612

Log. $B(A-B)$ . . . . . 9.5729027

Log. $\frac{41}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ . . . 9.8228233

8.7430364

8.1387624 . . — 0″.014

\+ 17″.598

atque sic profecto terminus tertius = + 17″593, summaque trium primorum terminorum = 34′22″.884

Tandem fiet pro termino determinando qvarto

$\frac{\eta^4 \cdot \Phi(o)^4}{2\tau^3}\sqrt{\frac{\pi}{2\tau A}}$ . . . . + 9″292279 . . . 0.9681222

Log. $A^3(A-B)$ . . . . . 0.2332509

Log. $\frac{1}{3}(16\sqrt{4}-27\sqrt{3}+12\sqrt{2}-1)$ 9.6039346

0.9681222

0.8053077 . . + 6″.387

Log. $A^2(AB-2C)$ . . . . 0.0010183

L. $\frac{5}{6}(1-3.2\sqrt{2}+3\,3\sqrt{3}-4\sqrt{4})$ .. 8 9343969

0.9681222

9.9035374 . . . + 0″.801

\+ 7″.188

Log. $A(AC-3D)$ . . . . 8.7074052

Log. $\frac{5}{4}(\sqrt{4}-3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-1)$ 8.7642537

0.9681222

8.4397811 . . . + 0″027

\+ 7″215

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log. $AD$ . . . . . | 8.4168516 | | |
| Log. $\frac{1}{8}\left(1-\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)$ | 8.6540929 | | |
| | 0.9681222 | | |
| | 8.0390667 . . . | — | 0.″011 |
| | | + | 7″.204 |
| Log. $A^2B(A-B)$ . . . . | 9.7852321 | | |
| Log. $\frac{5}{2}(2\sqrt{2}-2.3\sqrt{3}+4\sqrt{4})$ . . | 0.0375483 | | |
| | 0.9681222 | | |
| | 0.7909026 . . | — | 6″.179 |
| | | + | 1″.025 |
| Log. $(AC+AB^2-3BC)$ . . | 9.5310522 | | |
| Log. $\frac{15}{2}(\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{4})$ . . | 9.5730487 | | |
| | 0.9681222 | | |
| | 0.0722231 . . . | — | 1″.181 |
| | | — | 0″.156 |
| L. $(2ABC+AD-4BD-2C^2)$ . . | 7.9517260 | | |
| Log. $\frac{15}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}\right)$ . . | 8.9923844 | | |
| | 0.9681222 | | |
| | 7.9122326 . . . | + | 0″008 |
| | | — | 0″.148 |
| Log. $(2ABD+AC^2-5CD)$ . . | 8.2939587 | | |
| Log. $\frac{15}{16}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{2}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}\right)$ | 8.9434939 | | |
| | 0.9681222 | | |
| | 8.2055748 . . . | + | 0″016 |
| | | — | 0″.132 |

Log. $AB^2(A-B)$ . . . . 9.3372133

Log. $\frac{15}{4}(\sqrt{4}-\sqrt{3})$ . . . . 0.0020838

0.9681222

0.3074193 . . . $\frac{+\ 2''.030}{+\ 1''.898}$

Log. $(2AC-3D)\cdot\frac{D}{A^2}$ . . . 6.3655294

Log. $\frac{15}{32}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}-\frac{2}{9\sqrt{3}}+\frac{1}{16\sqrt{4}}\right)$ 8.5725445

0.9681222

5.9061961 . . . . . 0.000

Log. $B(2AC+AB^2-4BC)$ . . 9.0599180

Log. $\frac{15}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)$ . . . 9.1614633

0.9681222

9.1895035 . . $\frac{+\ 0''.155}{+\ 2''.053}$

L. $(AC^2+2ABD+3AB^2C$

$-5BC^2-5B^2D)\cdot\frac{1}{A}$ . . 8.1029109

Log. $\frac{15}{16}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{4\sqrt{4}}\right)$ . . . 8.8009540

0.9681222

7.8719871 . . $\frac{-\ 0''.007}{+\ 2''.046}$

$$\text{L.}\left(2ACD + 3ABC^2 + 3AB^2D - 11BCD - 2C^3\right).\frac{1}{A^2} \;\Big\}\; .. \; 8.2193042$$

$$\text{L. } \tfrac{45}{32}\left(\frac{1}{9\sqrt{3}} - \frac{1}{16\sqrt{4}}\right) \; . \; . \; . \quad 8.6652584$$

$$0.9681222$$

$$7.8526848 \; . \; . \; . \; - \; 0''.007$$

$$+ \; 2''.039$$

$$\text{Log. } B^3(A-B) \; . \; . \; . \; . \; . \quad 8.8891945$$

$$\text{Log. } \tfrac{5}{16} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 9.4948500$$

$$0.9681222$$

$$9.3521667 \; . \; . \; - \; 0''.225$$

$$+ \; 1''.814$$

$$\text{L. } B^2(3AC + AB^2 - 5BC).\frac{1}{A} \; .. \; 8.5874835$$

$$\text{Log. } \frac{5}{128} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 8.5917600$$

$$0.9681222$$

$$8.1473657 \; . \; . \; . \; - \; 0''.614$$

$$+ \; 1''.800$$

unde sequitur summam adeo quatuor primorum terminorum fore $= 34'24''684$, atque proinde, si pro quinto determinatum in antecedentibus adhibeamus valorem, summam scilicet omnium quinque terminorum fore $= 34'25''.044$.

Hæc igitur pro refractione habenda est horizontali, quæ, ex hypothesi paragraphi 49:næ, normali conveniet,

quem in § 30 assumsimus atmosphæræ statu, pro temperatura scilicet $= + 10°$ ex thermometro centesimali, Barometro autem ad temperaturam glaciei liquantis reducto $= 0^m.76$; atque profecto sic patebit, si seriem, qua valor ipsius $v$ definiatur, non ultra terminum $C\left(\frac{x}{\tau}\right)^2$ continuabimus, fore errorem, quo oriturus inde afficietur valor, $= + 11''37$.

Sed et si omni quo fas est rigore expositam in antecedentibus theoriam, cum observatione Groombridgii comparare animus est, non equidem sufficiet animadvertisse solummodo pro statu atmosphæræ juxta GROOMBRIDGIUM fuisse

$\eta = 58''19179 \ldots\ldots 1.7648617$
$= 0.0002821218 \ldots\ldots 6'.4504366$

sed et pro $A$, $B$, $C$ et $D$ sequentes adhibendos esse valores

$A = + 1.2769231 \ldots\ldots 0.10616473,$
$B = + 0.4413525 \ldots\ldots 9.6447856,$
$C = - 0.0232618 \ldots\ldots 8.3666434,$
$D = - 0.01839236 \ldots\ldots 8.2646374.$

## §. 58.

Sed et, quo demonstratorum in antecedentibus appli-

tio tandem fiat ad refractiones determinandas, quæ pro terrestribus valeant objectis, revocemus a paragraphis 21 et 22 æquationes

$$\left(\frac{du}{d\varrho}\right) = \frac{p}{1+x}\cdot\left(\frac{dx}{dp}\right), \qquad \text{et}$$

$$\left(\frac{dp}{p}\right) = -\frac{\varepsilon\, d\varphi}{1+\varepsilon\varphi},$$

prodibit utique ex his

$$\left(\frac{du}{d\varrho}\right) = -\left(\frac{1+\varepsilon\varphi}{1+x}\right)\cdot\frac{dx}{\varepsilon\, d\varphi},$$

ubi coëfficientem $\frac{1+\varepsilon\varphi}{1+x}$ numquam non licet unitati æqualem assumere, ex quo igitur pro objectis quibusque terrestribus

$$\left(\frac{du}{d\varrho}\right) = -\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)$$

atque cum fit ex hypothesi

$$d\varphi = -\varphi(o)\left(\frac{A-B}{\tau} + \frac{AB-2C}{\tau^2}\, x\right).e^{-\frac{Ax}{\tau}}\, dx,$$

ideoque, pro evanescentibus ipsius $x$ præ $\tau$ valoribus,

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = -\varphi(o)\left(\frac{A-B}{\tau}\right),$$

fiet adeo $\left(\frac{du}{d\varrho}\right) = +\frac{\tau}{(A-B)\,.\,\varepsilon\varphi(o)}$,

atque proinde, si ponamus $R$ refractionem exhibere ter-

restrem, cum sit, per demonstrata in paragrapho 23, $R = \frac{1}{2}\varrho$, fiet denique

$$R = \frac{\varepsilon . \varphi(o)}{2\tau} (A - B) . u ;$$

hoc est, cum per demonstrata in paragrapho 44 sit

$$A - B = \frac{1}{2\psi(o) - \alpha} ,$$

fiet adeo tandem

$$\left(\frac{u}{R}\right) = \frac{2\tau}{\varepsilon . \varphi(o)} [2\psi(o) - \alpha]$$

vel, si loco ipsorum $\varphi(o)$, $\psi(o)$, et $\alpha$, eorum substituantur valores,

$$\varphi(o) = \frac{b}{760} \cdot \frac{830}{830 + \theta}$$

$$\psi(o) = \frac{800 + 3\theta}{830} , \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{650}{830} ,$$

$$\left(\frac{u}{R}\right) = \frac{2\tau}{\varepsilon} \cdot \frac{760}{b} \cdot \frac{800 + 3\theta}{830} \cdot \frac{950 + 6\theta}{830}$$

designante videlicet $\theta$ temperaturam atmosphæræ ex thermometro centesimali determinatam, $b$ autem altitudinem barometri millimetris definitam; atque sic profecto patebit, pro normali, quem assumsimus, atmosphæræ statu,

$$\text{fore } \left(\frac{u}{R}\right) = 11 . 165$$

pro temperatura autem glaciei liquantis $= 10 . 122$

Cum autem hic valor pro objectis tantum locum habeat, quorum altitudo præ subtangente Barometrica $\tau = \frac{1}{2}26.$

$8261^m.844$ pro evanescente sit habenda, indefinitum etiam ejusdem velorem sic explicasse convenit. Ex Maclaurini scilicet theoremate erit

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \left(\frac{d\Phi}{dx}\right) + x\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right) + \text{\&c.}$$

$$= \left(\frac{d\Phi}{dx}\right) \cdot \left\{1 + x\left(\frac{dx}{d\Phi}\right) \cdot \left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right) + \text{\&c.}\right\}$$

ideoque generatim adeo

$$\left(\frac{du}{d\varrho}\right) = -\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{dx}{d\Phi}\right) \cdot \left\{1 - x\left(\frac{dx}{d\Phi}\right)\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)\right\}$$

Sed et per demonstrata in antecedentibus

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = -\varphi(o)\left(\frac{A-B}{\tau} + \frac{AB-2C}{\tau^2}x + \frac{AC}{\tau 3}x^2\right) \cdot e^{-\frac{Ax}{\tau}}$$

iterumque differentiando

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) = \varphi(o)\left(\frac{A^2-2AB+2C}{\tau^2} + \frac{A^2B-4AC}{\tau^3}x + \frac{A^2C}{\tau^4}x^2\right) \cdot e^{-\frac{Ax}{\tau}},$$

ideoque ponendo $x = o$

$$\left(\frac{dx}{d\Phi}\right) = -\frac{\tau}{(A-B)\cdot\varphi(o)}, \qquad \text{et}$$

$$\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right) = \varphi(o)\left(\frac{A^2-2AB+2C}{\tau^2}\right);$$

igitur fiet tandem

$$\left(\frac{du}{d\varrho}\right) = \frac{\tau}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{(A-B)\cdot\varphi(o)}\left(1 + \frac{A^2-2AB+2C}{A-B} \cdot \frac{x}{\tau}\right)$$

atque sic, pro normali quem assumsimus atmosphæræ statu, altitudine autem objecti unitatibus subtangentis Barometricæ definita $= h$,

$$\left(\frac{u}{R}\right) = 11.165\,(1 + 0.412\,h)$$

## §. 59.

Sed et ut, nulla circa universam atmosphæræ constitutionem assumta hypothesi, rationem explicemus, qua numerus $n$ $a$ prima illa deducendus sit velocitate, qua temperaturæ, pro incipientibus supra libellam maris elevationibus, decrescunt, certe patebit, pro evanescentibus (quales heic consideramus) præ subtangente Barometrica altitudinibus, assumi posse

tam $\varphi = \varphi(o).\left(1 - H.\frac{x}{\tau}\right)$,

quam $\psi = \psi(o).\left(1 - K.\frac{x}{\tau}\right)$;

ideoque cum ex æquatione (17) prodeat

$$\frac{d\varphi}{\varphi} + \frac{d\psi}{\psi} = -\frac{dx}{\tau\psi} = \frac{d\psi}{K.\psi(o)}.\frac{1}{\psi}\ ,$$

fiet adeo, per integrationem ita instituendam, ut cum $\varphi$ evadat $= \varphi(o)$, tum $\psi$ fiat $= \psi(o)$, posito $x = 0$,

$$\text{Log.}\left(\frac{\varphi}{\varphi(o)}\right) + \text{Log.}\left(\frac{\psi}{\psi(o)}\right) = \frac{1}{K.\psi(o)}.\text{Log}\left(\frac{\psi}{\psi(o)}\right),$$

et inde

$$\text{Log.}\left(\frac{\varphi}{\varphi(o)}\right) = \frac{1 - K.\psi(o)}{K.\psi(o)}.\text{Log}\left(\frac{\psi}{\psi(o)}\right), \quad \text{hoc est}$$

$$\text{Log.}\left(1 - H.\frac{x}{\tau}\right) = \frac{1 - K.\psi(o)}{K.\psi(o)}.\text{Log}\left(1 - K.\frac{x}{\tau}\right)$$

vel denique

$$H \cdot \frac{x}{\tau} = \frac{1 - K \cdot \psi(o)}{\psi(o)} \cdot \frac{x}{\tau} ,$$

atque sic tandem $(H + K) \cdot \psi(o) = 1.$

Sed et $\varphi^l(x) = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = -\frac{H \cdot \varphi(o)}{\tau}$ ,

atque per æquationem (8)

$$n = -\frac{2}{\varepsilon \cdot \varphi^l(o)} = \frac{2\tau}{H\varepsilon \cdot \varphi(o)}$$

$$= \frac{2\tau \cdot \psi(o)}{[1 - K \cdot \psi(o)] \cdot \varepsilon\varphi(o)} ;$$

tum vero, si velocitatem decrescendi pro temperatura atmosphæræ, ex diversa supra libellam maris elevatione, altitudine $M$ definiamus, ad quam scilicet ascendendum est, quo hæc uno gradu thermometri centesimalis decrescat, cum sit

$$M = a\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{3a}{830} \cdot \left(\frac{dx}{d\psi}\right) = \frac{3\tau a}{830\psi(o) \cdot K} ,$$

et inde $K \cdot \psi(o) = \frac{3\tau a}{830 M}$ , fiet adeo

$$n = \frac{2\tau}{\varepsilon} \cdot \frac{830\psi(o) \cdot M}{(830 M - 3\tau a) \cdot \varphi(o)}$$

$$= \frac{0^m.76}{b} \cdot \frac{9.175294\, M}{M - 29^m.86211} ,$$

ideoque, si altitudinem barometri ponamus $= 0^m.76$ , $M$ autem $= 167^m.5$ ,

$$n = 11.166 ;$$

atque pro $M = 140^m$ , $n = 11.663.$

# LOCA PARALLELA PLANTARUM,

SEU

ANIMADVERSIONES PHYSIOLOGICO-BOTANICÆ

DE

## VARIIS PLANTARUM VARIATIONIBUS,

PRÆCIPUE

## IN SVECIA BOREALI OBSERVATIS;

QUARUM CONSPECTUM,

CUM SUIS CAUSIS ATQUE EFFECTIBUS ILLUSTRATUM,

BREVITER EXPOSUIT

LAURENTIUS LEV. LAESTADIUS

ECCLES. KARESUANDENSIS IN LAPPONIA PASTOR.

---

## PRÆMONENDA.

Quamquam eorum sententiæ neminem, sana mente præditum, assentiri decet, qui naturam fortuito quasi, ac nescio quo casu exstitisse ajunt; perinde ac si nullus esset Deus,

qui cuncta Majestatis suæ verbo fieri jusserit: (quippe qui omnia totius universi momenta hactenus summo numine atque providentia gubernavit, eritque, ni fallor, posthac sustentaturus); tamen, quoniam et ipsius naturæ ratio postulare, et quotidiana quoque experientia contestari videtur, corpora, quæ organica appellari solent, in præsenti rerum statu necessario pendere momentis, quæ ad vitam excitandam sustentandamve maxime sunt necessaria, et sine quibus vita cogitari nequit: non est infitiandum, quin aut forma, habitu atque magnitudine, aut partium denique singularium continentia exsistendique modo possint mutari individua ejusdem speciei, ut ipsa illa momenta, quorum efficacia individua evecta, delataque sibi principia vitæ prosecuta, ad summum usque vitæ fastigium sunt enixa, momentaneis fere mutationibus affici videmus.

In his tamen vegetabilia primum sibi vindicant locum. Nam cum vegetabilia, quæ vita magis externa gaudere videntur, adeoque mutationibus magis obnoxia, non modo vicissitudines aëris coelique, sub quo nascuntur, temperiem pati; sed etiam circumtantiis locorum ipsiusque, cui hærent, soli duritie magnopere affici animadvertimus: non est mirandum, si tot agitata tempestatibus, tot retardata universi obstaculis, tot denique naturæ virium repressa lu-

ctationibus aut incrementis supra modum stimulantibus, lacessita vegetatio quandoque longius aberrare videatur a vulgari sua forma atque specie; cum ipsa quidem animalia, quæ tamen vita magis intrinseca fruuntur, ob eamque causam aberrationibus vacare deberent, in tanta tamen temporum, rerum locorumve varietate, non modo forma atque habitu, sed etiam natura atque indole tantopere mutari animadvertuntur, ut homines nonnullos immanes, bestiarumque natura imbutos, feras autem mansvetiores nonnihil humanitatis accepisse crederes.

Quod si hæc evenire inter animalia possint, quæ tamen nobilioris generis animantium habita fuere, ut sunt etiam canes, aves, rangiferi eorumque varietates, quas proinde nemo ausus est specie diversas judicare: non video, cur de variis plantarum varietatibus tantopere disputemus, aut qua re nonnulli impulsi, forsitan novarum rerum, ut videtur, nimium cupidi, quam plurimas possunt species creare velint; quum natura per se quidem integra atque absoluta, nequaquam adeo sit effrenata atque dissoluta, ut limitibus contineri nequeat.

Quamquam enim, ut sunt affectiones mortalium, si, qui in separandis limitandisve speciebus versantur, nonnihil gloriæ semet accepturos putent, si quid protulerint

novi, modica illa quidem, parum probanda nec admodum expetenda videatur lætitia, nisi quæ contemplatione naturæ ejusque sublimitate excitatur; neque tamen varietates contemnendæ, utpote quæ naturam locorum, vel climatis etiam diversam indolem repræsentare videntur. Species autem vere diversas limitare, hisque varietates subjungere, et quo decet loco atque ordine collocare, ut suum cuique tribuatur, maxima, si quæ in natura gloria, existimanda. Omnis autem ostentatio inanis est, eaque gloria parum diuturna, cujus principium a priori, tamquam e communi humanarum Divinarumque rerum fonte emanans, altiora non petit. Hoc igitur opus, hoc studium parvi properemus et ampli, ut, cum in adyta naturæ penetrare sacraque ejus mysteria investigare nequeamus, ea, quæ extrinsecus comprehendere liceat, sic in nostram aliorumve utilitatem vertere studeamus, ut communi bono inserviant.

His rationibus ducti, — et quoniam desunt vires graviora moliendi, facultates etiam tenues proprio quidquam sumtu edere prohibent: — operæ pretium rati sumus, hac occasione data, quæ de variis plantarum septemtrionalium variationibus experti sumus, proferre, nec non vegetationem Lapponiæ comparativam, pro nostra tenui facultate, qualitercunque extricare. Nobis satis erit, si re-

rum naturæ periti hæc ita accipient, ut tamquam adhortatio data vïdeatur iis, qui plus valent, ad ampliora melioraque præstanda.

Ceterum Lectores præmonitos velim, denominationes plantatarum hujus opusculi ex Wahlenbergii Flora Svecica esse allatas; nisi cum nomen auctoris speciatim citatur.

---

## §. 1.

Solem inoccidiuum, quem multi etiam principum intueri voluerunt, pauci autem potuerunt, inter mirabilia naturæ arcticæ phænomena haberi, nemo est, qui nesciat. Quæ sit autem efficacia ejus in omnibus naturæ regnis, quantamque vim in vegetationem exerceat lumen, cujus flamma duobus fere mensibus numquam exstingvitur, non adeo facile omnibus, qui confinia poli non viderint, intellectu videbitur. His enim regionibus ipsis oculis contemplari licet istiusmodi spectaculum in ipsanatura.

Inprimis cernitur vis ejus in vegetatione florum, qui perpetua luce stimulati nunquam fere clauduntur, quo facto majores quoque evadunt.

Nam ut sol, qui oculus mundi nec immerito habetur, universum animat atque illustrat, ita plantis quoque sua cuique dedit lumina almæ naturæ Creator, quæ sunt organa vel instrumenta percipiendæ luci idonea. Quia vero flores, quæ sunt plantarum lumina, quatenus oculorum vice funguntur, tantopere præsentia solis afficiuntur, ut sine illo nec rite explicari, nec florere possint: sequitur eos eo grandiores atque ampliores fieri, quo magis splendeat lumen.

Hinc flores sub arcto, non tantum ampliores, quam alibi terrarum, sed etiam colore vivacissimo, nec non elegantia longe ornatissimi. Corolla valde speciosa superbiunt, idque, ni fallor, ob lumen solare perpetuum, cujus vis ratione florum, in ampliando ac colorando sita est.

## §. 2.

Hæc ratio florum in Lapponia Tornensi maxime perspicua; quod et lumen solare his regionibus diuturnum, et planities terræ magis, quam aliis Lapponiæ regionibus spatiosa, neque præ altis montium cacuminibus obumbrata: unde plantæ, loca umbrosa amantes, heic omnino desiderantur; Ex. gr. *Saxifraga Cotyledon*, *Aconitum Lycoctonum*, *Sonchus alpinus*, unico tantum loco ad lacum Kil-

pisjaur; *Onoclea Struthiopteris*, etc. E contrario in Lapponia Tornensi ceterisque Lapponiæ vel Finmarkiæ orientalis regionibus, quibus alpium jugum paullatim sese ad planitiem demittit, enascuntur plantæ magis apricoriæ atque campestres ex. gr. *Veronica longifolia; Polemonium cæruleum; Saxifraga Hirculus; Sonchus sibericus; Carex laxa*, ceteræque ejusdem generis, quas in Lapponiis australioribus frustra quæras.

## §. 3.

Quæ sit autem efficacia solis inoccidui, vel exinde colligitur, quod coralla florum in septemtrione, ut supra ostendimus, amplior obtingat, nec non saturatius colorata; quod tamen in speciminibus exsiccatis minus lucide apparet.

Hinc plantarum variæ formæ, vel etiam species exstitere; ex. gr. *Veronica serpyllifolia*, var. *borealis:* floribus, fere ut in Ver. saxatili, grandefactis, eximie cœrulescentibus; quæ planta alias floribus parvis atque pallidis l. lactescentibus legitur. Quod autem tota planta his regionibus depressa sit, et undique pubescens, capsulis quoque obcordatis, quum vulgo reniformes sint: aliis de causis fieri potest, de quibus mox plura dicemus.

*Pinguicula* utraque *alpina* et *villosa*, floribus pulchrius *oculatis* in Lapponia Tornensi, observantur; unde *Ping. flavescens*. *Myosotis scorpioides* floribus Lapponiæ grandioribus legitur *a)*; atque hinc forte *Myosotis alpestris* facta.

---

*a)* Obs. Nulla hac forma in subalpinis Lapponiæ vulgatior. Folia radicalia obovata; ceterum tota planta succosior atque obesior ob solum pingvidum. Eadem planta glabrescit in aqua, ubi etiam folia lanceolata et calyx quinquedentatus evadunt, quæ forma *Myosotis palustris* forsitan audit. (Utraque forma sub Fl. Lapp. n. 98 a Cel. Wahlenberg intelligitur). Tertia myosotidis forma itidem in aqua enata, ad ripas lacuum sæpius inundatas lecta ex. gr. ad Öfver-Calix; quæ floribus minoribus, calycibus quinque-partitis, ferme glabris, pedicellisque longitudine calycis ad *M. caespitosam* Schultz, pertineret; nisi quod planta valde sit abbreviata atque simplex, utpote unico racemo subinde e radice exeunte constituta. Quarta in Lapponia forma, quam itidem in aqua legi, gracillima est floculis minutis; calycibus quinque partitis, laciniisque acutis; pilis raris adpressis; pedicellis vix longitudine calycis. Caulis filiformis est, et folia glabra anguste lanceolata, acuta et cito marcescentia; quam formam, nescio quo, referam; nisi *M. palustris* d. (Fr. Nov. Ed. 2. p. 63) hujus loci habeatur.

Hujusmodi formas, quamquam leviores sint a multis judicandæ, quia et rarius obtingant, minime tamen contemnendas censeo; nam et id, quod multi novarum rerum cupidi prorsus ignorare voluerunt, redarguere videntur, non omne, quidquid natura habet alieni, idcirco speciem esse; quum innumerabiles sint naturæ vires in plantarum formis creandis. Sic species illa Myosotidis, quæ de una Scorpioidide Linnæana in tot species divulsa, quot habet hebdoma dies, (vel postremum totidem plures) summos sæpe rei herbariæ scriptores nimis diu torsit; quæ tamen, omnibus in unam speciem collectis va-

Pari modo *Potentillam* illam *alpestrem* exstitisse opinor, quæ procul dubio nihil aliud est, nisi varietas P. vernæ, quamquam multis jam, multorumque nominibus, nobilitata est.

§. 4.

Hæc vegetatio florum etiam ad gramina extenditur. Nam his quoque glumæ calycinæ majores, præsertim in alpibus, forsitan aliis etiam de causis, quarum infra mentionem fecimus. *Agrostis alpina*, panicula pauciflora, glumisque calycinis majoribus, ut gramina vulgo in alpibus, vix ab A. rubra separanda *b*). Arundo Calamagrostis glu-

rietatibus, satis limitata videretur. Quare satius duxi, unam certam speciem habere, quam decem incertas creare. At constantes sunt? Omnino! Tales enim decet varietates Linnæanas esse. — Constantes sunt, quousque non mutatur locus. Sed fac mutari locum. Fac mutari montes in valles, hasque lacus fieri. Quid tum postea? Nonne stricta foret collina, et collina arvensis, sicut alpestris palustris? Nam in casibus dubiis perperam citatur locus ad auctoritatem speciei confirmandam, quum aliena soli locique natura potius diversitatis rationem vel causam in se continere videtur. Cujus diversitatis naturam, etsi jugiter demonstrare, vel in hortis imitari, valde sit difficile, re tamen vera variæ plantarum formæ repræsentare videntur.

*b*) Aliam etiam, saltim in Lapponia, habemus *Agrostidem*, cum A. rubra minime confundendam: glumis calycinis anguste lanceolatis; foliis latis, culmo succinctis; panicula ramosissima, sub anthesi valde divaricata, ante et post anthesin contracta. A. rubrâ duplo ma-

mis calycinis majoribus Lapponiæ instructa est; quare mea specimina, A. Pseudophragmitis nomine divulgata (Act. Scient. Acad. 1822), varietatem Calamagrostidis sistunt, quod postea animadverti. *Aira cæspitosa* in regionibus subalpinis, flosculis majoribus, sæpius trifloris aristisque, subexsertis luxuriat, quæ *Aira glauca*, Hartm. Fl. Scand. in addend., quasi A. alpinam et A. bottnicam connectit.

Nam ut supra dictum, non modo flores, sed etiam glumæ calycinæ graminum grandescunt in alpibus, partim ob lumen solare perpetuum, partim propter aquam frigore mixtam. Lumen solare ampliores reddit flores, atque co-

jor. Promiscue crescunt, sed A. rubra jam deflorata, hæc paniculam vix explicavit. Glumæ calycinæ hujus ante florescentiam subulatæ, sed in A. rubra ovatæ apparent. In A. rubra, corolla semper clausa, id est gluma interior numquam libera; quia exterior coralla interiorem amplectitur, inque eo statu sub ipsa anthesi quoque perseverat, seminique maturo adhæret. In altera valvulæ sunt a se invicem liberæ, corollaque proinde aperta, nec semini maturo adfixa. Figuræ 581 in Bot. Svec. proxima, sed duplo major. Si hæc est A. vulgaris Schrad., non videtur varietas esse A. rubræ, sed diversa species. Aliæ et permultæ sunt A. rubræ formæ muticæ; quæ vero sub N:o 668 in Bot. Svec. picta, vulgatissima in Lapponia est, neque post, neque antea, neque sub anthesin aliter, respectu paniculæ, divaricata, sed in omni statu sibi similis; neque glumæ calycinæ unquam adeo a se invicem remotæ, ut petala apparerent, sicut ejus, quam nunc descripsi.

loratiores. Frigore autem comprimuntur, vel contrahuntur vasa. Hinc abbreviatur culmus. Proinde panicula quoque et decurtata atque depauperata. Sed abbreviato culmo, paniculaque pauciflora facta, non possunt flores seu glumæ calycinæ tenues atque graciles fieri; sed eadem lege succrescant, necesse est; quia flosculi numerosi quasi in paucis continentur. Neque Aira alpina tantum istiusmodi vegetationem collectivam ostendit, sed multa alia vegetabilia, de quibus infra plura. Ceterum, quo altius surgit gramen versus alpes, eo brevius atque strictius fit. Habeo Specimina ad mare lecta Helgolandiæ 1819, quæ optime sunt evoluta: foliis elongatis, non convolutis et paniculâ diffusâ; quæ, nisi vivipara essent, ab A. cæspitosa discerni non possent.

Itaque verosimili videtur, *A. alpinam* non esse nisi varietatem *A. cæspitosæ*; sicut *A. montana L.* a *flexuosa* differt glumis tantum majoribus, magisque coloratis.

Huc citari possunt: *Hierochloa odorata*, var. *bicolora*, (Zetterst. Res. 2. p. 52); *Poa alpina* α; *Erigeron Acre* β. *glabratum*, (Zetterst. Res. 2. p. 129); *Solidago Virgaurea* β. *lapponica* (Wahlenb. fl. Sv. N:o 932.); quæ omnia non modo magnitudine, sed etiam colore vivacissimo, quo ad flores eximie differunt ab iis, quæ in aliis regioni-

bus crescunt. Sic certe apparet lucis, in septemtrione numquam non splendentis, efficacia.

§. 5.

At lumen solare, tam in summo septemtrione salutiferum atque duituruum, vel in eo deprehenditur, quod vegetationem, in primis florum, tantopere accelerare videtur, ut cerealia, quæ aliis regionibus longo temporis intervallo vix explicare flores potuerunt, postquam coelo assveverint arctico, duplo fere breviore temporis spatio non modo defloruisse, sed etiam fructus maturos præbuisse animadvertamus. Quam celeritatem, etsi nonnihil caloris, coadjunctum luci, ad properandam vegetationem conducere videatur, maxime tamen solis efficaciæ imputandam existimo; quia floribus in septemtrione, die pariter ac nocte perpetua lacessitis luce, nihil est temporis reliquum, quo requiescere potest vegetatio: et accelerata vegetatione floris, celerius absolvitur fructificatio.

Itaque omnia, quorum ad præparandum germen opus est, hoc est ipsa anthesis, et quæ ex ea sequuntur, scilicet fructificatio et fecundatio germinis, maxima celeritate in Lapponia perficiuntur. Sic summo in septemtrione Flora omni, qua par est, festinatione properare opus videtur,

ut eo citius requiescat; quasi haud ignorans, non multum sibi temporis esse consumendi, mox instante autumno.

§. 6.

In genere observandum, quod præter rationes jam allatas, quæ vegetationem singularem in alpibus reddunt; ut lumen solare perpetuum, frigus nocturnum tempestatibus exacerbatum, solum pinguidum etc., etiam aliæ accedunt causæ, non minus memorabiles, quam Lapponiæ peculiares, maximique momenti habendæ respectu plantarum, quæ mutationibus facile afficiuntur.

Regio alpina multâ pluviâ quotannis immadescit; terraque ferax aquarum, ex alpibus emanantium, uberrimisque irrigua fontibus, subjacentes regiones fluviis crebrisque torrentibus alluit; quare regio alpina et omnis fere Lapponia scaturiginosa et penitus inundata evadit. Hinc paludes in Lapponia maximæ vastissimæque exstitere. Hinc vegetatio singularis maximeque palustris; quippe quæ calamariis et amentaceis maxima parte constituitur. Hinc Lichenum major copia, quam nusquam terrarum; quorum vegetatio in Lapponia fere nunquam, ut multis aliis regionibus, ob nimiam siccitatem interrupta, in fastigium sui generis enixa, miram Lapponicæ gentis oeconomiam fundavit.

§. 7.

Hujus rei efficacia vel ex eo intelligitur, quod non solum plantæ, alias palustres in alpibus montanæ fieri solent; ex. gr. *Vaccinium uliginosum; Pedicularis lapponica; Betula nana;* unde variationes quoque formatæ ex. gr. *Ledum palustre β. dilatatum; Stellaria uliginosa β. alpestris* Hartm.; *Carex canescens β. alpiolca; Carex panicea β. sparsiflora; Carex aquatilis β. epigejos* etc.; sed etiam, quod idem locus pluries quotannis inundatur, rursusque, dissolutis nivibus, exsiccatur, formam ambiguam nanciscuntur plantæ, sicut ipsa elementa, quibus circumdantur. Sic Salices variæ præsertim ad ripas fluminum, bis quotannis inundatas, duplici sæpe occurrunt formâ, scilicet foliis inferioribus angustatis glabris, amentisque foliaceis, quia serius explicantur: ideoque dispositio, ex amentis desumta, Salicum, valde incerta videtur; nam plurimas Salicum species, in Lapponia saltim, videre licet amentis foliaceis, foliisque orbatis, ne ipsa quidem Salice limosa excepta. E contrario folia superiora, quæ aqua numquam tangit, magis in latitudinem efformata, et amenta sæpius præcocia; quæ ratio in uno sæpe eodemque individuo deprehenditur.

§. 8.

Pari modo plerasque plantarum variationes exstitisse opinor. Nam cum momenta, quæ ad vegetationem exci-

tandam, sustentandamve maxime sunt necessaria, ea terrarum parte, quæ zona temperata nuncupari solet, magis æqualiter vel definite sese habere animadvertuntur: ipsas quoque plantas perfectiores fieri necesse est, omnibusque partibus melius, seu æquali proportione evolutas; quum autumnus et ver, hiems et æstas, dies noctesque mutuis viribus recompensantur. His regionibus variationes quoque constantiores esse, quisquis facile videt *c*). Nihilo tamen secius variationes sint necesse est, atque species per se species. Ubi vero vires contrariæ, quibus æquivalentibus omnia sese æqualiter habent, in alterutram partem inclinare, ut in zona torrida æstus, in zona autem frigida frigus: tum vibrare vegetatio, extra modum vagari, et mox inopinatas formas proferre coepit.

Sic vegetatio, suppressa in alpibus, non explicare omnia, quæ in aliis regionibus explicat, sed plurimas partes stipare atque in unum gerere solet; quo vegetatio quasi *collectiva* (si istiusmodi voce uti liceat) oritur, id est: ejusmodi ratio, qua non solum magnitudo totius plantæ diminuitur, vel saltem abbreviatur, sed etiam de partium numero aliquid detrahitur.

---

*c*) Cfr. Wahlenb. Fl. Sv. introductio.

Itaque, quod ramosum est in silvis, fit simplex in alpibus; quod erectum procumbens, et vicissim. Vegetabilia exinde iisdem regionibus sæpius pauciflora, et tamen grandiflora facta, pluribus ramis in unum quasi caulem connatis, flosculisque numerosis in unum florem redactis.

## §. 9.

Hæc vegetatio collectiva, in alpibus evidentissima, multis de causis oriri potest; etsi acerbum, imiteque illud arcticum frigus in proxima esse causa videtur, cujus vis in contrahendo ac minuendo sita est. Nam omnis vegetatio acceleratur calore, frigore autem retardatur aut suffocatur. Hinc vegetabila solis æstu maxime optimeque vegetare solent, præsertim humo modice uda. — Inprimis cernitur vis caloris, in maturando fructu. Quare Lapponica tellus, utpote nimis frigida, fructuosa esse nequit; quum ad maturandum fructum aliquanto pluris esse opus caloris videtur, quam quod Lapponia præstare potest.

At ejusmodi vegetabilia, quorum vegetatio atque fructificatio brevi absolvitur, aut quorum fructus minimam ipsius herbæ partem constituunt, ideoque citius vel modico calore maturescunt, in Lapponia maxima copia proveniunt.

## §. 10.

Quum autem summum sæpe caloris atque frigoris existat discrimen in alpibus, idque minimo temporis, locorumve intervallo; cum urgeat frigus superne in vertice montis, fervensque æstuet calor in fauce: quisquis facile judicare possit, quæ sit efficacia virium tali impetu contrarie agentium; quanta dissimilitudo herbarum alienissimis hisce regionibus.

Hæc aliaque naturæ arcticæ phenomena ignorantibus prorsus incredibile videbitur, quo modo individua ejusdem speciei inter pollicarem ac sesquipedalem altitudinem variare; cur hirsuta atque glaberrima, aut qua ratione simplicia atqua ramosissima fieri possint.

Hanc ob causam *Saxifraga cæspitosa* olim sine ulla tamen sufficiente ratione in plures species divulsa; namque ignorabant auctores, acaulem fere esse plantam in alpibus, caulescentem vero ramosamque in inferioribus montium regionibus. Simili ratione *Saxifr. Cotyledon* in fissuris rupium inferioris regionis caule superbit altissimo, sæpe bipedali, paniculaque ramosissima; eadem planta summo alpium jugo humilis est, caule interdum biunciali, paniculaque subcymosa: unde petala latiora, magis obovata, et

punctis purpureis maculata. (*S. Cotyledon* β. Læst. V. A.H. 1826.). *Epilobium alpinum* α. in summis alpibus uniflorum; β. in sylvis multiflorum. *Ranunculus acris* aliis regionibus ramosus atque multiflorus; in alpibus simplex atque uniflorus, flore, respectu magnitudinis plantæ, satis amplo. (Ran. montanus? Willd.). *Ranunc. glacialis* in summis alpium cacuminibus semper uniflorus; sed inferioribus, 3—4 florus. *Hieracium murorum* in alpibus simplex atque pauciflorum imo uniflorum; ceterum ramosum jam in Lapponia sylvatica, ibique floribus minoribus. *Tussilago frigida*, quo altius surgit, eo brevior atque pauciflora, flosculis radiatis elongatis atque coloratis; in sylvaticis autem brevioribus vel demum evanescentibus (β Wg. Fl. Sv.); sed floribus numerosis.

Huc citari possunt: *Apargia atumnalis*, var. uniflora seu *Taraxaxi*; *Gnaphalium supinum*, in alpibus acule et pauciflorum, capitulis 2. 3. majoribus; in inferalpinis semipedale, floribus usque ad duodecim. Cum his congruit *Saxifraga rivularis*, var. *acaulis*, in summis alpibus; *Campanula rotundifolia*, var. *linifolia* etc.

## §. 11.

Sed etiam gramina in alpibus abbreviata, pauciflora, et tamen grandiflora sunt ut supra ostendimus. Ex. gr.

*Luzula parviflora β. spadicea*; *Luzula campestris β. nivalis*; *Carex leporina*, var. *subalpina d)*; *Carex lagopina*, var. *crassiuscula e)*; *Carex atrata* var. *nigra, f)*; *C. alpina α* (Wahlenb. Fl. Lappon.); *Carex ampullacea* var. *borealis, g)*; *Carex saxatilis*, var. *rigida*; *Carex pulla α.* (vide infra). Quibus rebus facile evincitur, quod etiam ipsius naturæ ratio testatur, plantas alpinas non modo abbreviari et simpliciores fieri, sed etiam floribus paucioribus verum majoribus instrui, vi vegetationis collectivæ; quia plures quasi in paucis continentur *h)*.

---

*d)* Spiculis in spicam ovatam congestis, (num C. ovalis Good), rufo-fuscis; capsulis concavo-convexis, margine serrulatis, squamis longioribus. Legi ad Quickjock et Peurajaas 1821.

*e)* Culmo abbreviato stricto; spiculis confertis, majoribus. Ex alpibus Lulensibus 1821.

*f)* Spicis oblongis approximatis, erectis, subsessilibus; infima subpedicellata; capsulis obovatis, obtusis, brevissime apiculatis, glaucescentibus; ore subintegro; squamis aterrimis, ovatis, unicoloribus. In summo alpium jugo ad Tjatja Lappon. Tornens., quo tria tantum specim. legi; quorum unum spicis quattuor, spicam mediam habebat androgynam inferne masculam; alterum specim. habebat masculam terminalem; tertium binas masculas atque unicam femineam. Est quasi media inter *C. atratam* et *alpinam*. Num *C. nigra?* All.

*g)* Culmo foliisque subfiliformibus, canaliculatis; spicis subovalibus, subfuscis; capsularum rostro abbreviato. Spicæ famineæ plerumque bina, sed mascula unica: quasi Ampullaceam et rotundatam connectens.

*h)* Cfr. *Aira alpina*, *Poa alpina α.*, *Festuca vivipara* etc.

§. 12.

Hac vegetabilium contractione singularis exstitit vegetationis alpinæ indoles, qua non solum abbreviatur truncus, sed etiam folia ex oblonga in rotundam abeunt figuram. Quæ ratio trunci, quâ nexus naturalis inter folia atque ramos observatur, illorumque habitus eadem proportione, ac truncus mutatur, omnino memorabilis est. Quis est, qui varietatem Betulæ albæ pendulinam non noverit? Hujus folia suum cujusque ramum imitari videntur. Rami pendentes sunt, atque graciles: proinde folia angustata atque acuta gerunt. Eadem Betula varios formarum modos emetiens, postremum in *fruticosam* vertitur, cujus folia parvula ac orbiculata e ramis valde torulosis erumpunt, adeoque trunco subdepresso optime respondent *i*).

§ 13.

Eadem ratione variationes Salicum interpretari oportet, quarum folia mirifice mutantur, non modo magnitudine atque pubescentia, sed etiam habitu atque figura, ut nullæ sint Lapponiæ species, quarum folia subrotundam ac

---

*i*) Dignoscitur Betula fruticosa Pall.: trunco subdepresso; foliis subrotundis, obtusis; squamarum lobis subæqualibus, et profundius, quam in *B. alba*, partitis. Ægre quidem a B. nana discernitur; sed transitus ad B. albam indubitabiles sunt.

lanceolatam figuram non ambigant. Quæ res sagacissimos sæpe rei herbariæ scriptores fefellit. Quis enim crederet, *Salicem lanatam* foliis lanatis integris rotundis, atque varietatem foliis lanceolatis, serratis glabris, eandem esse speciem. Quæ differentia inter *phylicifoliam* ac *nigricantem*, inter *arbusculam* atque *majalem*; *romarinifoliam* et *arenariam*? Quæ quidem species, me judice, haud differunt. Certe pubescentia nihil refert; nam præter *S. phylicifoliam*, *fuscam* et *versifoliam*, etiam *auritam* atque *lividam* germinibus glabris sæpe animadverti.

## §. 14.

Facile quidem largior, esse quandam *phylicifoliam* sensu Linneano distinctissimam, de qua Linnæus in Fl. Sv. "*habitat in pratis Vestrobottniæ et sylvis Lapponiæ*," scripsit. Quæ vero in Vestrobottnia vulgatissima, nulla alia, quam S. majalis est (Wahlenb. Fl. Lappon.), scilicet utraque forma (germinibus et glabris et pubescentibus) quarum hæc, ni fallor, Sal. nigricans l. c. ex parte. At quæ in sylvis Lapponiæ, eadem est arbor, scilicet: *S. majalis*; nisi *arbuscula major*, (Wahlenb. l. c.) hujus loci habeatur, cum qua *arbuscula minor*, (Wahlenb. l. c.) omnino confluit; a qua tamen *arbusculam minimam*, (Lin. Fl. Lappon. §. 360. et Tab. 8. fig. m.) diversam statuo,

vix ulli post Linnæi tempora notam, quam bis tantum ipse legi, in summis alpium regionibus *k*). Itaque *S. majalis*, Wahlenb. Fl. L., *S. arbuscula* ibidem, nec non *S. phylicifolia*, Fl. Sv. ex parte, unam speciem, quam *phylicifoliam* appellare si libet, haud recuso, mihi quidem constituere videntur. At *S. phylicifoliam*, Wahlenb. Fl. L.; *Salicem nigricantem* ibid., formam, quam S. Capreæ approximari dixit; *S. phylicifoliam β.* Fl. Svec. et *S. nigricantem* ibidem, alteram Speciem quodammodo ambire censeo; quo etiam Salix illa *Rudbeckiana*, (Lin. Fl. L. Tab. 8. fig. a.) omnino pertinere videtur. Rem vero ea, qua nunc dixi, ratione se habere, nullis queo argumentis demonstrare, quam ipsa natura, cujus testimonia tuto citare audeo; quia innumerabiles formas, specimina, et omnes, quidquid est Salicum, variationes, tredecim fere annis, e Svecia boreali collectas, diligenter examinavi et disquisivi, ex quibus didici, non plus, quam duas earum, quas supra memoravi, formarum species creari æquo animo posse.

---

*k*) *Sal. arbuscula minima* dignoscitur 1:mo Amentis omnibus etiam masculis serotinis et foliaceis. 2:do squamis obovatis l. in masculis ferme subrotundis; ciliatis tantum. 3:tio foliis minimis, et post exsiccationem costatis! rigidis. Ab hac *S. arbuscula* vulgo, differt: amentis, in primis masculis, præcocibus! Squamis lanceolatis pilosis, amentis duplo majoribus. Folia lævia tantum nec elevato costata.

§. 15.

*Salix arbuscula* major, seu orgyalis (Wahlenb. Fl. L. n:o 476) in ipso loco (ad lacum Virihjaur) a me quoquoque observata, nullo modo ab ea differre videtur, quæ per universam Lapponiam vulgatissima *l*), ad ripas fluminum omnium Lapponiarum, et prorsus eadem per totam Vestrobottniam, Angermanniam, superiorem Jemtlandiæ usque, densissimas constituit silvas.

Hanc ad *S. majalem* semper detuli, ejusque nomine Botanicis Sveticis communicavi: cujus etiam meritiss. Koch. (in commentatione Sal. Eur.) particeps factus esse videtur, isque eam ad *Sal. arbusculam* citavit, cum qua etiam paullatim sed aperte confluit. Ab hac S. majalis vera, s. (germinibus glabris) in Vestrobottnia vulgaris, nihilo, nisi germinibns glabris differre videtur.

*Salix* autem *phylicifolia*, (Wahlenb. Fl. L. n:o 482), cujus forma magis urbana seu campestris (Wahlenb. Fl. Sv. β.) in Svecia australiori occurrit, prorsus eadem est,

---

*l*) Arbor tenuis biorgyalis et supra, germinibus pubescentibus; foliis nitidissimis semper glabris et subtus eximie albo glaucescentibus. De hac in Fl. L. altum silentium? Suspicor tamen eam sub S. majali intellectam; quamquam S. majalem proprie sic dictam (germ. glabris) nullibi Lapponiæ vidi.

ac *Sal. nigricans*, (Wahlenb. Fl. L. et Sv.); quia et in descriptione dicitur: *"folia sub incauta exsiccatine omnino nigrescunt,"* et mox: *"ramuli tenelli et rachides, petiolique semper pubescunt."* Quo nihil a Sal. majali, arbuscula, ceterisque huc pertinentibus formis, potest esse alienius.

## §. 16.

Plurima de variationibus salicum essent animadvertenda, eaque memoriâ digna, quæ tamen temporis locique angustia hic prætermittere coactus, in aliud tempus opportunum, vel speciale opusculum, si velint fata, reservare satius duxi. Nunc hoc unum adjungam, dispositionem Salicum, e germinum foliorumve vestitu desumtam, parum consentaneam esse naturæ, quod et affinitatis vinculum rumpitur, et species sæpe cum varietatibus commutantur. Neque methodus illa, quæ amentis nititur, satis apta, quia, ut supra dixi, nimis vaga atque incerta. Nam et casus incidunt et tempora, quibus amenta præcocia fiunt serotina, aut foliacea nuda. Nulli denique characteres fidi, nisi qui ex pedicellis germinum sumuntur, respectu habito nectarii atque styli *m*).

*m*) Meritissimus Koch. in supra laudata commentatione, quum in characteribus Salicum recensendis, de ameutis agit pag. 5. inter alia

## §. 17.

**Primum igitur hoc attendendum judicavi, quod etiam experientia testatur, quomodo vegetabilia alpina plerumque**

---

de *Sal. lanata*, quam propriæ quoque sectioni subjecit, *"amentum"* ait, *"in apice ramuli conspicitur, et aliquot præterea sub apice hujus ramuli, et sunt sessilia."* Quod tamen neque verum est, neque omni tempore absolutum. Amenta sessilia sunt, dum in alpibus commoratur planta. Ubi vero eo sylvarum ventum est, quo neque nivibus obsita, dum flores explicare conatur, planta, neque frigore oppressa folia, quorum germinationem non modo retardari sed etiam suffocari apertum est, quam diu planta vel frutex undique nivibus circumdatur, apicibus tantum ramulorum eminentibus, et amentum nihilo secius mitentibus: mox alia inquam exstitit planta, cujus non modo amenta lateralia, sed etiam folia amentacea satis bene explicata, quemadmodum Fig. Linnæana (Lin. Fl. L. Tab. 7. fig. 7.) ingenue eam repræsentat; quo in statu pilis aureis quoque destituitur, et *Sal. lanata* var. *depolita* audit. (Wahlenb. Fl. Svec. n:o 1117. — Excluso tamen syn. *S. depressæ*, quæ, ni fallor, variationem *S. lividæ*, cinerascentem dictam (Wahlenb. Fl. L. n:o 488), spectat; cujus itidem Synonym. Lin. Lapp. §. 358, ad varietatem *S. cinereæ* pertinere videtur, quam omnino memorabilem inveni, nisi forte diversa species: germinibus pedicellatis stylisque porrectis inter S. cineream et limosam media). Itaque demiror, hanc figuram a celeberrimo auctore prætervisam esse, in qua amentum laterale et foliaceum fingitur: qualem ipse quoque in sylvis subalpinis animadverti, et nuperrime in Lapponia Tornensi ad Lammaskoski legi. Neque hujus tantum amenta, sed aliarum multa eadem ratione variare solent. Ex. gr. *S. caprea*, cujus amenta vulgo præcocia et sessilia audiunt, in Lapponia foliis amentaceis ipso amento longioribus legitur. Pari modo *S. cinerea, phylicifolia s. nigricans, repens* etc. Sed illuc revertor.

deprimuntur ad terram. Nam frigore contrahuntur vasa, qua compressione omnes partes constipantur, incrassatur truncus et abbreviantur rami. Præterea calet terra maxime in superficie, qua radii solis tamquam in focum colliguntur. Nam superior plaga, quattuor aut quinque ulnarum distantia sursum ex summitate herbarum, aut tempestatibus refrigerata est, aut aëre, præsertim in alpibus jam minus condensato, maxima caloris parte privata; nullis ibidem objectis caloris materiam excipientibus.

Itaque vegetationis summa vis, maximaque caloris efficacia proxime ad superficiem terræ, adeoque circa radices agunt. Hinc vegetatio exstitit eximie *radicosa*, — si hoc vocabulo uti liceat, — quæ ad summum in alpibus enixa fastigium, quod radices ibidem maximam vegetationis partem constituunt non solum perseverantia, sed etiam mole, id inprimis effecit, ut plurimæ species per radices propagarentur; caulibus etiam ac truncis in radicis speciem mutatis.

Hinc plurimæ species arborum in alpibus truncum habent subterraneum, vel saltim procumbentem; ramis tantum de terra eminentibus *n*).

---

*n*) Videre licet extrema Pini sylvestris, Abietisque individua, candice valido atque robusto, sed repentina arboris contractura sum-

§. 18.

Radicibus tali modo incrassatis, truncoque abbreviato; rami quoque decurtati sunt. Quo factum est, ut folia, quæ analogiam trunci sequuntur, latitudinem magis quam longitudinem conformata, orbiculatam potius, quam lanceolatam assequantur figuram.

Sic Salices *herbacea*, *polaris* et *reticuluta*, in summis alpium cacuminibus folia habent orbiculata vel subrotunda; in sylvis autem *S. herbaceæ* cordata sunt, *polari* ovata et *reticulatæ* elliptica. *Sal. lanata* in alpibus foliis subrotundis, in sylvis interdum lanceolatis instruitur. *Sal. glauca* foliis obovatis est in alpibus; in sylvis autem præsertim ad ripas fluminum, anguste lanceolata habet. *Salix myrsinites*, summo alpinum jugo foliis orbiculatis obvenit; ceterum adeo humilis atque depressa, ut a *Salice herbacea* vel *polari* ægre discernatur: eadem species in campis convallium foliis ovatis, acutis inuenitur, quo frutex dimidiam hominis altitudinem nonnunquam assequitur. Deinde in paludibus frigidissimis, sphagnoque repletis, quo subterraneum gelu numquam liquescit, eadem Sa-

---

mitatem versus abbreviata, ut conica fere appareat arbor; quasi alia esset circa radicem temperies, atque interstitium, quod est a medio ad summitatem arboris.

lix reperitur caudice sphagno immerso; foliis jam obovatis, obtusisque. Et prorsus eodem loco nascitur varietas illa Betulæ, quæ *intermedia* seu *fruticosa* audit, nec non alia multa, quæ causam diversitatis suæ in ipso loco habere videntur: ex. gratia *Carex limosa*, var. *rariflora*; *Stellaria, crassifol.* var. *paludosa* etc. de quibus infra plura. Itaque, quod vix alpium frigus in contrahendis, abbreviandisve plantarum partibus efficere potuit, hoc subterraneum gelu facile perfecit o).

## §. 19.

Hæc sunt aperta magis naturæ arcticæ momomenta, quæ facile perspici possunt. Quæ vero obscuriora videntur, nec non exploratu difficillima, variæ rationes: non quod meliores præbeant illa characteres, sed quia causæ mutationum minus sunt perspicuæ.

Multas quidem plantas locis aridis arenosisque pubescere, in aquosis autem et inundatis glabrescere comper-

---

o) Ex his formis, variæ finguntur species ab iis, qui locorum vim in mutandis plantarum formis explorare noluerunt. Sic de *Sal. lanata, glauca*, et *myrsinitide*, species de singula ternas fingere possemus; nisi natura aliud svasisset. *Istiusmodi* varietates necessarias esse naturæque consentaneas, invenimus, cum causas earum inquirere velimus.

tum est. Ex. gr. *Festuca rubra β. arenaria; Viola canina*, var. *arenaria; Salix fusca*, var. *arenaria; Arabis Thaliana β. hispida, s. Sisymbrium arenosum* L. etc.

Itaque, cum *Cerastium alpinum* undique villosum fieri videmus in siccissimis montium fissuris; contra vero glabrescere juxta aquam, idque adeo paullatim ac successive, ut nulli dentur limites: non opus est dubitare de specifica eorum identitate. Neque aliam subesse causam hujus differentiæ, quam diversitatem locorum putamus.

Pari modo multa alia exstitisse nova *Cerastia, Hieracia, Potentillas, Myosotides, Salices* opinor, quæ omnia diversis nascuntur locis: neque ideo species novæ existimandæ, propterea quod individua quædam speciem loci præ se ferunt. Quasi Species esset in loco, quod idem est, ac si locus faceret speciem, ut, mutatis locis, mutaretur etiam species in alienam speciem. Quo magis loca natalia eorumque natura ac efficacia in mutandis plantarum formis, diligenter inquerenda; ne quid capiat detrimenti scientia, neque novarum rerum indulgendo cupiditate, neque temere detrahendo naturæ, quod ipsa suo jure salvum atque integrum esse voluit.

§. 20.

Accedit ratio valde singularis, quæ in primis pubescentiam in alpibus efficere videtur.

Grassantur tempestates turbulentæ in alpibus, ventusque vehemens, inprimis aquilonis et cauri, qui summa vi maximaque celeritate, cuncta, quæ moveri possunt, rapiunt ac secum ferunt.

Hinc ventus aquilo, oriens e septemtrione, nunquam non dura spirans; illinc zephyrus caurique hiberni una consurgunt, altisque montium parietibus repulsi, horsum versum luctantur, ut tanto majori impetu per claustra montium, arctissimasque alpium fauces irruant *p*). Hi cuncta,

---

*p*) Harum rerum, quarum supra mentionem fecimus, nescio, an ulla habeatur fides, licet comperta non minus quam audita refero, de tempestatibus contrarie luctantibus, quibus et ipse sæpe interfui. Ventus est Norvegiæ præsertim septemtrionalis, simul cum maris æstu oriens e Septemtrione; et incolis Nordlandiæ nomine *Sö-kulen* alias Svetice: *Hafs-gâlan* notus. Hic quidem flatus communiter spirat quotidie, incipiens hora post meridiem quarta, et in multam noctem, nullis aliis obstantibus tempestatibus, perseverat; licet vis ejus haud procul ab ostio sinus, cujus ab ortu oritur aquarum mole ex occano influentium, vehementior, et quo longius ad interiora sinus itur, per claustra montium locorumque angusta concitata, increbescit jugo tenus. In hoc discrimine rerum, id est summo alpium jugo, alteri obviam itur vento, cujus ab ortu solis haud minori impetu cursus,

quæ obviam veniunt, tollunt verruntque per auras. Pulvis, humus, foliaque vegetabilium emarcida devolant, quæ ad radices alpium colliguntur: undé solum his regionibus pingvissimum, pabulique fertile; simul humo cum aqua superne delata. Nix cumulata vento jacet, et jactam nec sol pluviæve resolvunt. Nives enim indurat boreas, perpetuasque facit.

Sic exstitere glacies, nivibus et aqua congelatæ. Nix enim e verticibus montium nec non de planitie jugi cum ventis devecta, nusquam, nisi locis cavatis vel tranquillis considit: quo ad altitudinem montis fere quotannis accumulatur. Mox inductione aquarum superne diffluentium, multaque pluvia hausta, in montem excrevit glacialem.

## §. 21.

Hæc glacierum vasta moles multum caloris undique consumit, brumamque de media æstate facit: unde Ran-

---

e regione normaliter obstitit alteri: ut ventus aquilo a tergo; a fronte afflaverit auster, aut tetris nubibus atrox oriens; cujus tamen cum tonitru minitans dira procella, cum flatu oceani frustra luctatur. Itaque neuter eorum ipsum superat jugum, cujus in fastigio, tamquam in ultimo termino rerum ipsimet congressi, in concursu excitant imbrem. Atque hic, quidquid est plantarum rariorum, legitur: sicut *Campanula uniflora; Pedicul. flammea; Phaca lapponica* ad Tjàjà Lappon. Tornens. cum multis aliis ad Vivihjaur, Lappon. Lulensis; nec non simili loco ad Mauasjaur Lappon. Pitensis.

gifer, animal caloris impatiens, interdum solis æstu, nec non oestris culicibusve lacessitus, maximo, quo potest, cursu summa montium cacumina petit, ibique totam diem commoratur, glaciebus insistens. Quin etiam vegetabilia, caloris æque, ac rangiferi impatientia, harum glacierum vicinitate magnopere delectari videntur; ut *Ranuncul. glacialis* et *nivalis; Gentiana glacialis; Salix herbacea; Agrostis algida*, quæ circa margines glaciei læte vegetant, gratumque pabulum nivicolis Rangiferis atque Lagopodibus præbent.

## §. 22.

Itaque varias plantarum species, in alpibus propter frigus atque tempestates, aliis autem regionibus ob siccitatem pubescere, animadvertendum judicavi. Nam omnis evaporatio acceleratur vento atque calore, quod locis aridis apricisque apparet. Immo spirante zephyro citius arescit fœnum, quam æstu solis. Proinde exhalatio plantarum uberior locis apertis ventosisque, quam in umbra. Accelerata autem exhalatione, diminuitur aqua, et contrahuntur vasa; quo facto humores vel latices mucilaginoso-glutinosi, qui pubescentiæ elementum constituere videntur, aut siccitate aqua sua orbati, aut tempestatibus arefacti, pubescentiam edunt. Videmus etiam animalia quædam tempestatibus atque frigore vexata, crassiore vellere cir-

cumdari, Ex. gr. *Canis lapponicus*; *Rangifer alpinus*; *Lagopodes alpini* etc. Sed illuc redeamus.

## §. 23.

Exempla pubescentiæ, quæ aut tempestatibus alpium, aut gelu nocturno, aut etiam glacierum vicinitati debetur, plurima adferre possemus, sed paucis erimus contenti. *Veronica alpina* β. capsulis pubescentibus. *Veronica serpyllifolia* β. quo ad pubescentiam. (vide supra et Cfr. Wahlenb. Fl. Sv.) *Alchemilla vulgaris* β. *montana*, foliis sericeis; *Ranuncul. nivalis* et *glacialis!* *Potentilla nivea* α, et P. *verna* β, seu *alpestris* Hall. fil. — *Hieracium alpinum*, et *murorum* var. nigro-hirsutum! *Apargia autumnalis*, var. *Taraxaxi*, in alpibus nigro-hirsutissima. *Erigeron uniflorum!* et var. *floribus tribus*, violacco-villosum *q*)! *Salix lanata* α.; *Salix glauca* hirsutissima forma; *Salix limosa*, nivea et maxime villosa; *Salix myrsinites*, foliis adultis hirsutissimis; *Sal. nigricans*, hirsutissima forma; *Sal. livida* β. *cinerascens* foliis adultis utrimque hirsutis.

Huc etiam citari possunt Carices quædam capsulis adustis; quia et Salicum ramuli annotini loco pubescentiæ isti-

---

*q*) foliis radicalibus glabris, sed floribus 3:bus villosissimis; *E. uniflorum* et *alpinum* utique combinans.

usmodi ustilaginem habent r) et iisdem causis imputari debent. Ex. gr. *Carex ustulata, pedata, pulla,* et *vesicaria* var. capsulis atrofuscis etc. (vide infra).

## §. 24.

Exempla pubescentiæ plantarum, ex siccitate ortæ, præter supra allata, pauca addere libet. *Veronica scutellata β. villosa*, etiam Lapponiæ locis exsiccatis; *Avena subspicata α.* (*β.* vide infra). *Plantago lanceolata* foliis maxime villosis, etiam Norvegiæ ad Indals-berget. *Myosotides* pleræque, ut supra dictum, glabrescunt in aqua, locis aridis pubescunt. *Primula farinosa α.*; nam *β. stricta* glabrescit in Lapponia, quia inundata aqua. *Statice Armeria β;* (nisi superioris §.). *Ranunculus repens* et *acris*, in siccis pilosi; juxta aquam glabrati. *Draba hirta*, in rupibus siccissimis foliis stellato-pubescentibus est; ad rivulos alpinos glabrescit. *Lathyrus pratensis* var. *lanuginosus* Fries Nov. etiam Angermanniæ. *Hieracium dubium var. strigosum*, (Læst. V. A. H. 1825) s). *Hieracium murorum*, var. *incisum*, aliæque formæ montanæ et apricoriæ: nam in ri-

---

r) *Sal. lanata, limosa, nigricans, glauca,* ramulis interdum glabris, sed adustis observantur.

s) Folia radicalia obovata; pili lutescentes; flores exacte umbellati. Num itaque *H. cymosum β.*? Fries Nov. Ed. 2. Annon potius V?

pis lacuum vel fluviorum omnino glabrascit *t*). Pari modo *Hieracium boreale* Fries. Huc pertinent Salices *lanata*, *glauca*, *limosa*, *versifolia*, *aurita*, *livida* etc., quarum folia locis siccis plus minus hirsuta, in aqua autem glaberrima; sicut formæ nuper allegatis plantarum varietatibus contrariæ, quo propius ad aquam nascuntur eo glabriores fieri animadvertuntur, aliis innumeris omissis *u*). Quibus rebus facile intelligitur, plantas in genere pubescere solere siccitate, sed glabrescere aqua.

## §. 25.

Sed etiam aliis de causis mutari plantarum naturam vel speciem externam videmus. Plantas in genere extenuari aqua, nec non glabrescere; contra vero abbreviari atque pubescere solere siccitate, jam supra breviter ostendimus. Vasa enim aqua repleta extendi, apertum est; et

---

*t*) Formas ad H. vulgatum Fr. utique pertinentes, sub H. murorum β. (Læst. l. c.), cum Ill. Wahlenb. subintellectas habebam cum, H. vulgat. illuc citarem. Itaque levius peccatum est.

*u*) Annon *Cerastium arvense* β; *C. strigosum* Fr.; *Rosæ collinæ* etc., locis apertis campestribusque pubescentes, huc quoque spectant? Cfr. Fries Nov. Ed. 2. pag. 144, obs. et pag. 146, *Rosa canina collina.* Item pag. 178, ubi de Menthis: *"in valde aquosis plurimæ grabrescunt,"* affirmat.

si planta undique sit aqua circumdata, etiam compressionem patitur ex gravitate aquarum: qua compressione omnes partes extenuantur, atque gracilescunt. Sic oritur vegetatio *aquatilis*, qua folia ac caulis in longitudinem magis, quam latitudinem efformantur.

Ex hac plantarum aquaticarum indole, quæ duplici oritur virium concursu, scilicet aquarum pondere extus undique prementium; intus autem vi vegetabilis interna, sursum tendentis, quod planta ipsa, aqua levior est: facile intilligi possit, cur non tantum plantarum partes inundatarum, ad summum in aqua subtilitatis gradum dissolvantur, rursusque emersæ in unum quasi confluant; sed etiam, quod maximi est in re herbaria momenti, cur tot plantarum species terrestrium, sed forte in aquam disseminatarum, omnibus partibus adeo gracilescant, ut in alienam speciem transiisse putares. Ex hoc quoque judicari potest, cur nonnullæ plantæ aquaticæ tenuiores sint in chataractis rapacioribus, quam in stagno: itidemque subtiliores in mari, quam alibi aquarum dulcium; nam utrobique majori vi premuntur. Præterea vis gravitatis major est in alto, qnam in superficie aquarum, ideoque majori sunt plantæ tenuitate in aqua profunda; quare etiam caulis sursum incrassari videtur.

§. 26.

Plantæ aquaticæ majori sunt tenuitate in alto, in aqua manante vel in mare; vi legis hydrostaticæ.

Exempla hanc rem illustrantia, pauca adferre liceat. *Hippuris vulgaris β. fluitans* (Wahlenb. Fl. L.) in ipsis fluviis; *α.* in limo. *Juncus supinus γ. fluitans* (Fries. Nov. Ed. 2. pag. 92. "*in amnibus rapacioribus*") *v*). *Potamogeton rufescens*, *gramineus*, ceterique ejusdem generis, foliis natantibus in alto; in fossis autem exsiccatis foliis submersis fere destituti; quare dispositio hujus generis, ex foliis natantibus et submersis, necessariis vel non necessariis desumta, vix unquam constare poterit: siquidem folia inundatarum æque fallacia, ac ipsum, quo nascuntur elementum, videantur. Sic *Potamogeton sparganifolius x*) in

---

*v*) Pari modo Juncus articulatus Jemtlandiæ legitur foliis fluitantibus in amnibus.

*x*) Quamquam hujus semina matura nondum invenire licuerit; tamen descriptionem, brevem licet, adferre oportet. *Potamogeton sparganifolius:* Caule tereti circiter duas lineas crasso; foliis submersis exacte linearibus; supremis lanceolato-linearibus, longe acuminatis et in petiolum decurrentibus, undulatis; foliis natantibus (si adsint) lanceolato-oblongis, subcoreaceis, longissime petiolatis, utrinque acutis; spica florifera longe pedunculata; pedunculo subæquali. *Hab.* in alto fluminum Lapponiæ Tornensis. Supra et infra Templum Karesuandense multis locis in fluvio Muonio frequens lectus

Lapponia Tornensi nuper repertus, foliis submersis ad graminifolios; natantibus autem ad plantaginifolios pertineret. *Potamogeton perfoliatus*, in fluviis rapacioribus foliis lanceolatis instruitur, quo in statu *P. gramineo*, var. *boreali* (Læst. V. A. H. 1825) approximatur. *Alisma Plantago* β. *graminifolia*. *Nymphæa lutea* β. *pumila* γ). *Ranunculus aquatilis*, *var. eradicatus* ζ). *Myriophyllum*

---

annis 1827, 1830, sed sine fructu maturo. Sparganio natanti e longinquo simillimus. Folia natantia sæpe desunt, tumque nemo sane divinaret, tam propinquum esse P. natanti, ut dubium sit an ex illo tuto separari possit. Conf. ulterius huic opellæ addenda I.

γ) *Nymphæa pumila* in rivulis haud profundis nascitur, quibus aqua usque ad fundum hieme congelatur; quare glacies cum aqua vernali e fundo sublata, radices quoque secum tollit, paucis tantum radiculis relictis: ex quibus planta *pumila* seu diminuta et gracilescens crescere pergit: floribus proinde minoribus, foliisque angustioribus, unde ovarium quoque angustatum, sicut tota planta depauparata ob causas supra allatas. En! Exemplum varietatis, quam natura mirando, sed omnibus perspicuo modo formavit. Quis *Nymphæam pumilam* primo obtutu distinctissimam esse speciem non judicaret? Ast cognitis causis nemo est, qui auctoritatem hujus plantæ specificam propugnare vellet.

ζ) α. subaquaneus, caule bi l. 3-pollicari, filiformi; floribus minutissimis, ante explicationem vix semine cannabis majoribus; foliis non proprie capillaribus, sed abbreviatis; radice filiformi, fibrosa. Hab. in stagnis vadosis ex. gr. Karavuopio et Saxajerfvi ad Karesuando Lappon. Tornensis. Cæspitose crescit in fundo, quo etiam floret sub aqua, interstitio 3-pedali ex summitate plantæ ad superficiem aquæ. Æque memorabilis et omnino constans varietas ac Nym-

*spicatum β. tenellum a)*. Huc pertinet *Callitriche verna β.* foliis omnibus linearibus, in rivulis et fluviis *b)*, et *Sparganium natans*, var. foliis ensiformibus et erectis in limo *c)*. Potamogetones *tenuifolii* seu *marini*, *Ruppia maritima β. rostrata*, "*in fretis fluenti mari oppositis.*" (Wahlenb. Fl. Sv. n:o 207.); cum quibus comparari possunt *Zanichellia palustris β. pedicellata*, et *Zostera marina β. oceanica*, nec non *Ceratophyllum demersum β. submersum*, quæ omnia se in vicem confirmant. Nam ut supra dictum, quo altius

---

phæa pumila, et pari modo orta. Glacies enim radices *Ranunculi aquatilis* funditus evellit; sed reliquiæ i. e. *radiculæ*, ipsæ graciles, gracillimam edunt plantam; quæ tali modo diminuta, præcox quoque facta est: Nam *Ranunculus aquatilis vulgaris* nondum explicavit flores, hujus fructibus jam maturis. *Ran. aquatilis α*, sæpius in alto et in aqua manante nascitur; unde et serius floret, et folia valde elongata et eximie capillacea habet.

*a)* Ad analogiam Ran. aquatili foliis tenuissimis est hæc Myriophylli varietas, quia aut in amnibus rapacioribus, aut in alto fluminum provenit, cum M. spicatum *α.* in stagnis vadosis nascitur.

*b)* *C. tenuifolia* (Fries Nov. n:o 277.) "*Seminibus acutangulis* et *floribus inferioribus pedicellatis*," dignosi dicitur, quæ mihi necessarius aquæ effectus esse videtur, et ex ipsius plantæ tenuitate sequuntur, non tamquam character diversæ speciei, sed tamquam necessariæ analogiæ inter plantam et fructum vel inter omnes et singulas plantæ partes indicium.

*c)* Sparganium natans, in fluviis foliis longissimis invenitur, sed plerumque sterilis in hoc statu.

mergitur planta, eo tenuior est, neque aliter esse potest. Eadem ratio obtigit, si aqua manante nata sit; nam utrobique vis pressionis aquæ major est *d*).

## §. 27.

Sed etiam plantæ terrestres gracilescunt in aqua, quam ob rem inconsvetam adipiscuntur formam, novarumque specierum præbuerunt ansam. Ex. gr. *Alopecurus geniculatus β. natans*, foliis longissimis natantibus; cujus spicula, hanc ob causam depauperata, aristos breviores gerit. Quo magis enim tribuitur foliis, tanto plus detrahitur floribus. (Cfr. *Sparganium natans*, sterilis in fluviis; *Scirpus acicularis*, in stagnis sterilis, in quo statu præcipuum est Anatum, et Anserum alimentum; in siccis tandem fructificat. *Juncus supinus* vàr. *fluitans* sterilis. Ex quibus intelligitur, maximam vim fructificationis pessumdari in aqua, in quo elemento folia maxime luxuriant).

Quare illud mihi summo jure contendere videor, vel etiam, si fas esset, postulare tamquam communem a natu-

---

*d*) Nisi valde hallucinor, multi Potamogetones novi, multæ Charæ, nec non vegetabilia subaquanea, in scriptis botanicorum novâ specie emerserunt, quæ natura, fatali quodam casu, profundius altiusque in mare demersit.

ra latam legem, ut quo magis luxuriant folia, tanto plus deesse floribus oportet, præcipue vero fructui: nisi quæ singularis naturæ gratia atque favor tantum largiretur bonorum, ut utrisque partibus liceret luxuriose vivere; quod tamen nobis nivicolis vix exspectandum, quibus semper frigoris plus quam satis est, caloris autem minimum.

*Agrostis algida*, locis, aqua nivali tota æstate inundatis glumis calycinis destituta; locis siccioribus easdem recuperare videtur. Sic aqua non tantum speciem, sed etiam genus mutare potest! (Cfr. Wahlenb. Fl. Sv. n:o 1622.).

*Aira flexuosa* var. *uliginosa* (Fries Nov. n:o 14), "*in limo circa lacuum litora, hieme inundata.*" Gracilitate sua; et eadem *A. flexuosa*, var. *sine aristis!* quam in maxime uliginosis sæpe animadverti, cum *Alopec. genicul.* β. optime congruit et quo ad locum, et ratione effectus loci.

Porro: *Poæ nemoralis, pratensis, trivialis*, foliis omnino setaceis, et paniculis subinde simplicibus s. pauciforis occurrunt in pratis, ad mediam æstatem inundatis; unde *Avena subspicata* var. *agrostidea* e) in ripis fluminum,

---

e) Culmo foliisque gracilibus, glaberrimis; panicula laxa, pauciflora et rariflora; *valvulæ corol.* lanceolato-acuminatæ, et subaristato bi-

vere semper inundatis, adeo gracilis facta, ut Agrostidem referat. *Andromeda polifolia* foliis subteretibus convolutis, in paludibus profundissimis, nec non *Ledum palustre* α. leguntur.

*Saxifraga nivalis* β. *tenuior* (Wg. Fl. L.) locis aqua nivali inundatis, interdum *Androsacæ septemtrionali* simillima; *Primulæ farinosæ* β. analoga, quæ eandem ob causam, (aquam) gracilior et glabrata evadit. *Rubus saxatilis* β. *castoreus f*), *Serratula alpina*, var. foliis lineari lanceolatis, subintegris, in uliginosis *g*). *Gnaphalium dioicum*, var. *alpicola*, (Hartm. Fl. Scand.) *h*); in paludibus uliginosis.

---

furcatæ; rachis pedicellique læves. *Agrost. alpinæ* primo obtutu similis.

*f*) Pedunculis elongatis folia superantibus; floribus binis, ternisve; petalis oblongis duplo, quam in Rubo saxatili α. majoribus, dilute roseis; flagellis reptantibus: Bacca hemisphærica, aromatica; acinis 5—7, quam in Rubo arctico majoribus. Lapponibus Lulensibus; *Vadnem muorje*, i. e. Bacca castorea. Hab. ad ripas torrentium Lapponiæ Tornensis, Juckasjerfvi ad molendinam, quo aqua ripas inundat initio æstatis; Karesuando ad Karavuopio loco uliginoso; ubi cum *Rubo saxatili* evidentius confluit; et Peurajaur Lapponiæ Lulensis. Valde memorabilis videtur, at ob locum aquosum, istiusmodi formam gracilem accepisse videtur.

*g*) Vulgo folia late lanceolata, sinuato-dentata, et radicalia etiam late cordata sunt.

*h*) Gracile, pauciflorum (flor. communiter ternis); pedunculis elongatis.

*Carex canescens*, var. *subloliacea*, (vide infra). *Carex Buxbaumii*, var. *subcæspitosa*, *i*); et *Carex limosa* α. in paludibus profundis. Hæc omnia gracilescunt ob loca, plus minus aqua inundata.

§. 28.

Aliud ejusdem argumenti. Salices omnes, in vel juxta aquam enatæ, gracilescunt; unde ramuli tenues, et folia proinde angustata facta; quibus rebus maximam cum S. rosmarinifolia habent similitudinem. Quare hanc quoque meram S. fuscæ varietatem esse crediderim; quia ad littora maris, sæpius inundata habitare dicitur *k*). Nam amenta Salicum abbreviari videmus, cum cum in statum venerint, ut amenta vix explicare possint, sive ob abundantem aquam, nonnihil fructui detrahentem, sive ætate, sive aliis rationibus, quæ amenta præcocia serotina reddunt.

§. 29.

Non dubito plerasque exstitisse plantarum formas istiusmodi soli locique mutationibus. Quia vero causæ

---

*i*) Gracilescens, foliis angustatis longioribus; spiculis femineis binis; mascula terminali. Hab. cum *Carice livida* in paludibus profundissimis.

*k*) Specimina *S. rosmarinifoliæ* simillima, in litore marino Vestrobottniæ legi, quæ ad fuscam aperte pertinebant.

mutationum in zona temperata magis sunt determinatæ; formas quoque plantarum constantiores reddant, necesse est. Ubi autem eo locorum ventum est, quo climatis momenta subitaneis fere mutationibus afficiuntur, ut aqua, frigus, ventus, in alpibus inordinati, turbulenti: nunc summa virium contrarietate luctantium; nunc tonitru, imbre, crebrisque ignibus micantium meteorum: mox tranquilla omnia, quasi nihil omnino accidisset; his inquam regionibus, quibus autumnus et ver, hiems et æstas, dies noctesque in unum quasi punctum congrediuntur, durusque boreas et lenissimus auster exosculantur: hic quoque omnia, quidquid est formarum, varietatum exstremitatumve contrarium, alienissima licet specie distinctarum, continua quasi catenarum serie ad se invicem approximantur. Quæ, quum ita sint L. B. quid tandem de ingenti illa novarum specierum mole censendum judicas, novissimis hisce temporibus creatarum, et sæpenumero e pilis pendentium?

## §. 30.

Sed est tamen variationum naturæ non satietas modo, sed etiam modus, quem excedere et natura non potest, et homo non debet. Sicubi, cum *Circæam alpinam*, *Ranunculum reptantem*, ceterasque vulgatissimas plantas propemodum explosas videmus, ut quidam voluerunt; plus

profecto est, quam quod salva speciei idea tolerari possit. Idem fere de *Agrostide vulgari* et *Equiseto umbroso l)* Willd., plantis sui generis distinctissimis, statuo; quæ cum promiscue crescunt, maximamque vegetationis partem certis regionibus constituunt; tum nescio, cur de earum specifica differentia dubitemus: aut si, qui coadunare velint, consentaneum esse naturæ putent, certis ac indubitatis principiis confirmare debent sententiam. Neque enim natura ex sola suspicione, h. e. pro lubito semet tractari patitur.

## §. 31.

Ut vero hæc, quæ nunc sparsim tractavimus, paullo melius illustrentur: utque harmonia virium in natura vegetationis agentium, cum suis causis atque effectibus appareat, simulque analogia partium, ex eadem lege pendentium perspiciatur: placet, quoniam res ipsa postulare videtur, ut rationem earum, quarum supra mentionem fecimus, rerum qualitercunque reddamus, conspectum dare formarum in Svecia præsertim boreali occurrentium, cum

---

*l) Equisetum umbrosum*, vulgatissime in Lapponia obvenit, sed sæpius prætervisum, quia spica florifera præcox atque caduca; caulis autem sterilis *E. arvensi* simillimus. Cum *E. sylvatico* nil commune habet.

causis atque effectibus illustratum; quo magis eluceat vis naturæ in varietatibus plantarum formandis; neve ea, quæ speciei sint attributa, ad varietatem temere referantur.

## §. 32.

Momenta, quæ ad vegetationem excitandam, sustentandamve maxime sunt necessaria, in duas præcipue dilabuntur partes, quarum altera temperiem spectat coeli; altera solum, in quo nascuntur plantæ. In his temperies coeli tamquam genitor omnium, quidquid est viventium, considerari potest, cujus opera omnis vita restauratur, atque regeneratur. — Altera, terra mater omnium, cujus in gremio omnia, quidquid est vegetabilium, nascuntur; cujus etiam salutifera nutritione omnis vita alitur. Harum rerum concursu vel unione cuncta, quæ sunt vitæ organicæ phænomena, existunt, agunt, atque operantur. Vitam organicam loquor.

Quum autem facultates virium, in superficie terrarum agentium, ejusmodi sint, ut neque pariter ubique agant, neque omni tempore pari ratione: sequitur, quoniam causa semper respondere debet effectui, ut diversa oriatur naturæ species, alia atque alia terrarum parte, prout diversa

sunt rerum momenta, quorum efficaciâ excitatur ac sustentatur vita.

## §. 33.

Quod ad temperiem attinet, primum consideranda est lux, cujus vis respectu plantarum, in ampliando ac colorando sita est. Lux autem considerari potest, 1:mo *ratione intensitatis*, quæ major est locis apricis meridiemque versus pronis, quam in umbra. Hinc partes plantarum multa luce non modo coloratiores factæ, sed etiam saturatius coloratæ.

Exempla sunt gramina pleraque, quæ, quotiescunque nascuntur in umbra, pallescere solent. Quæ res nonnunquam novarum etiam specierum præbuit ansam. Ex. gratia *Agrostis setacea* (Hartm. Fl. Scand. Ed. I.); *Agrostis alba* et *A. straminea* Hn. l. c.; quæ vel in umbra vel ætate albescunt. Pari modo *Arundo stricta* quæ locis apricis arenosis purpurascens; in umbrosis vel demum ætate provectior pallida est. Item: *Arundo Calamagrostis. Holcus atropurpureus;* et *Poæ* omnes albescunt in umbra; ut et *Festucæ*, sed purpurascunt aut glaucescunt in aprico. Unde *Poa pratensis*, var. *iantha*, et *Poa nemoralis β. glauca*, (*Poa glauca* auctor.); *Festuca ovina* var. *glauca* Fr. etiam Lapponiæ vulgaris; (nisi *F. cæsia* Sm., eandem ob causam cæsia

facta, huc quoque spectat). *Festuca rubra*, quæ in umbrosis pallida, in minus umbrosis glaucescens, in aprico rubra evasit. *Arundo sylvatica*, locis apricis violacea, umbrosis glaucescens (*β. chalybea* W g) *m*). Huc citari possunt, *Chenopodium album*, var. *virescens*, locis occultis pinguidis; *Angelica Archangelica*, flor. albescentib. locis umbrosissimis, Lapponice *ridals* dictis, (L æ s t. de Agricultura Lappon.) *Luzula campestris β. pallescens* locis umbrosis, unde tenuis quoque facta. *Epilobium palustre* var. flor. albis, in umbra. *Saxifraga Cotyledon α.* flor. alb. præsertim in rupibus umbrosis (*β.* foliis glaucis, floribusque purpureo-maculatis in summo alpium jugo locis apricis, nisi sequentis §.); *Saxifraga aizoides* flor. luteis in umbrosis l. occultis; var. flor. aurantiis in aprico. *Dianthus deltoides* viridis in umbra; *β. glaucus*, locis apertis, apricis. *Ranunculus acris*, qui locis pinguidis atque occultis ad radices montium caule plusquam 3-pedali ramosissimo, foliisque maximis laxuriat, floribus sæpe albescentibus legitur (annon. *Ranuncul. aconitifolius* huc quoque spectat?). *Pedicularis palustris*, var. flor. albo, in umbrosis occultis. *Rubus saxatalis β. castoreus* flor. albescentibus locis aquosis umbrosis.

---

*m)* Mea specimina *A. chalybeæ*, (V. A. H. 1825) e loc. umbros. erant, et color glaucus, forte deterior violaceo, id est minore lucis portione contentus.

*Gnaphalium dioicum*, et *Achillea millefol.* floribus coloratis locis apertis et apricis, sed albis in umbra.

§. 34.

Sed etiam aliis de causis color plantarum mutari solet, maxime diversa substantia soli, plus minus acidis mixti. Ex. gr. *Campanula rotundifol.* flor. albo, Quickjock; *Campanul. latifol.* flor. albo, Norvegiæ in Nummedalen etc. *Polemonium cæruleum*, flor. albo, Jemtlandiæ alibique. *Epilobium angustifol.* flor. alb. locis nuper deustis, ad Muonioniska, et Ardnapuozod Lappon. Pitens. *Vaccinium Vitis idæa*, baccis albis; ÖfverTorneå. *Menziesia cærulea* flor. alb. in monte Mammatsch Lappon. Lulens. *Aconitum Lycoctonum*, flor. lutescent. albis, loco nimis pingvi, ad Kiergevore juxta Virihjaur. *Geranium sylvaticum* flor. alb. locis nuper deustis frequens. *Astragalus alpinus* flore albo, ad Maunu et Alasaavi, locis pinguidis Lappon. Tornens., quo etiam citari possunt, *Actæa spicata* baccis rubris, (Solanum nigrum, cum suis varietatibus. *Myosotis versicolor*, *Anagallis cærulea*), *Galeopsis versicolor*, *Viola bi-tricolor* etc. Quorum quædam exsuccæ siccitate (ut Campanul. rotundifol., Polemon. cæruleum, et forsitan Menziesia) nec non *Myosotis versicolor*, *Viola bicolor*; quædam

dilutæ aqua atque pinguedine, (ex. gr. *Aconitum Lycoctonum*, *Astragalus alpinus*, *Galeopsis versicolor*, *Viola tricolor*); quædam nimio acido prægnantes (variationes violaceæ), nonnullæ etiam accedo suo privatæ (*Epilobium angustifol.* fl. alb. *Geranium flor. albo.* *Campanul. latifol.?* fl. albo, *Vaccin. Vit. idæa* bacc. alb.) discolores factæ sunt.

## §. 35.

Lux ratione diuturnitatis vel perseverantiæ, qua intra circulum polarem magis, quam alibi, diuturna, majores reddit flores nec non coloratiores. Hinc omnis flos in septemtrione grandior factus, ob lumen solare perpetuum. Cujus rei exempla supra sunt allata.

Eandem ob causam flores in septemtrione saturatius colorati sunt; quæ res sæpe novarum specierum præbuit ansam. Ex gr. *Potentilla aurea*, Horn.; *Ranunculus sulphureus* Phips.; *Viola montana*, Lin. *n*). *Statice Armeria* var. *alpi-*

---

*n*) Respectu floris amplioris, qui tam saturate coloratus est in Lapponia, ut nil tale in *V. canina*, multo minus in lactifloris conspicere licuerit. Hæc amplitudo corollæ, nec non color in *V. montana*, cum multis aliis communis est, Lapponiæ floribus, adeoque in characteribus speciei nullius fere momenti. Cetera de Viola hacce *montana* vide infra.

*na o*) *Trientalis europæa*, flor. rubent. (Zetterst. Res. 2. p. 5.) *Andromeda polifolia* (Zeterst. l. c. p. 58.). Aliis innumeris omissis.

## §. 36.

Quod si lumen ac multa matutina pluvia adimeretur floribus; mox utriusque cernitur defectus, et elegantiæ et amplitudinis. Immo desunt, incredibile dictu, flores semiflosculosorum. Sic *Sonchus sibericus* mirandum in modum hoc anno (1830) defloravit sine ullo vestigis floris. Nam flores ob multam pluviam explicare non potuit. Pari modo *Hieracium alpinum* ceteraque ejusdem generis, floribus clandestinis munere conjugii defuncto, (i. e. flosculis radiatis non explicatis), semina matura dedere. *Gentianam nivalem* bis tantum hac æstate, floribus evolutis, animduertere licuit.

## §. 37.

Calor, qui præcipuum climatis fundamentum constituit, considerari potest 1:mo *ratione quantitatis*, quæ est vel

---

o) Planta glaberrima digitalis; folia subclavata, planiuscula. Foliola involucri s. calycis exterioris ovata, obtusa (ipsa *a*. foliis infimis involucri acuminatis et capitulum æquantibus instructa est). Squamæ in hac varietate eximie roseæ. In summo alpium jugo legi an. 1330 ad Tjatja supra Lyngenfjord.

*universalis p)*, vel *partialis.* Illa est, summa caloris totius anni, quavis regione sub certa latitudine. Hæc est summa caloris locorum singularium, quorum diversitate maxima vegetationis dissimilitudo oritur; unde vegetatio, respectu distributionis plantarum geographicæ, est vel *latitudinalis*, vel *localis.* Hæc vero est vel *continentalis*, vel *maritima.* Vegetatio maritima, est vel *oraria* vel *litoralis.*

Vegetatio *latitudinalis*, ostendit terminos plantarum sub certa latitudine, quos tamen variæ plantarum species transgrediuntur, vi vegetationis localis.

*Vegetatio localis* respicit ejusmodi vegetabilia, quæ diversa locorum natura oriuntur, sive locum, quo nascuntur plantæ, considerare velis, sive ipsius plantæ diversitatem, a loci natura diversa pendentem.

## §. 38.

*Vegetatio oraria*, continet plantas in oris maritimis nascentes, quas aqua salina numquam tangit, quæ vero au-

---

*p)* Quantitas caloris univarsalis proprie fictitia est; nam in toto terrarum orbe vix duo inveneris loca omnibus rebus sibi similia. Itaque summa caloris re vera singularis est, quod vegetatio quovis thermometro certior ostendit. Quare computatio caloris hactenus ex observationibus thermometri facta in ipso, quo factæ sunt observationes loco, stricte valet; in universa autem circumjacente regione, tantum ex parte.

ra maritima, nonnihil humida atque frigida, magnopere afficiuntur, eamque ob causam gracilescunt, unde species variæ creatæ, quæ tamen non nisi varietates, a loco pendentes, sistunt. Ex. gr. *Veronica maritima*, *Arundo strigosa*; *Aira bottnica q*); *Festuca* seu *Glyceria capillaris* (Liljebl. *r*) *Triticum litorale* Host et *Tr. pungens* Decand. (Fr. Nov.); *Angelica litoralis* Fr. Nov.; *Armeria maritima* Röm. *Juncus bottnicus* Wahlenb. Fl. L.; *Silene maritima* Willd.; *Pyrethrum maritimum* Willd.; cum quibus comparari potest *Jasione montana β. litoralis* Fries Nov.; *Geranium cicutarium β.* Wg. Fl. Sv.; *Carex glareosa* etc.; quorum omnium tanta est convenientia, ut, si vel unum in specici ordinem aut dignitatem tollere velis, facile omnes eumdam sibi honorem haberi velint. Si adhuc plura hujusmodi loca-parallela conferre velis (plurima enim ut leviorra omisi), facile invenies, qua proportione hæc omnia se invicem confirmant. Hæc enim: *Veronica longifolia: V. maritima* = *Aira cæspitosa: A. bottnica* = *Juncus bulbosus: J. bottni-*

---

*q)* Ut videtur gracilior *Airæ cæspitosæ* forma, non enim ignoramus quomodo plantæ continentales gracilescere solent juxta mare. Est quasi altera extremitas A. alpinæ opposita. Conf. ulterius addenda II.

*r)* Gracillima *Gl. distantis* forma in scopulis maritimis a me quoque lecta ad Lyngenfjord, paricula erecta, adeoque contracta, flosculis minutis, totum gramen gracile.

*cus* etc.; et si analogiam continuare velis: *Carex heleonastes: C. glareosa* = *Carex aquatilis: C. salina* = *Salix fusca: Sal. rosmarinifolia*, omnia simul sumta longam, sed æqualem et naturæ consentaneam analogiam construunt. Quorm differentiæ proxima causa aura maritima esse videtur, nonnihil frigida atque humida.

## §. 39.

*Vegetatio litoralis*, continet plantas mere litorales, quas aqua salina fluctibus sæpe alluit, quæ ob hanc causam succosæ, quasi sale prægnantes, vel etiam obesiores ob pingnedinem ex vegetabiliis in litore marino putrescentibus factæ, in alteram partem, vegetationi orariæ contrariam, vergunt, minima licet loci distantia. Hinc quoque varietates variæ exstire, ex quibus nonnulli etiam species creare voluerunt. Ex. gr. *Hippuris maritima; Scirpus palustris* β. (Wahlenb. Fl. Lappon.) *s*); *Scirpus rufus* β. *balticus; Scirpus lacustris* β. *litoreus; Juncus balticus!* (si cum *J. glauco* comparetur); *Carex salina* respetu *C. aqua-*

---

*s*) Legi ad Lyngenfjord 1829. Gluma illa, quæ in *Scirpo palustri s. uniglumi* Link, character essentialis forsitan habetur, in hac varietate nunc adest, nunc deest. Forma glumarum variabilis, obtusa et acuta. Itaque nihilo nisi colore atrofusco, atque habitu solidioro differre videtur. Radix omnino multicaulis.

*tilis; Glyceria capillaris* (Wahlberg Fl. Gothoburg.,) quæ flosculis crassioribus, staturaque robustiore obeso, ob pingvedinem in *"littore limoso"* maris (Wg. Fl. Sv.) omnino contrarium *Glyceriæ capillari* Liljebl. tenet, sed *Gl. distans* a mari remota medium. Cum his comparari possunt *Salicornia, herbacea* α., *Eryngium maritimum*, *Atriplices!* quæ, quum a litore maris removentur, gracilescere solent, sed in ipso litore maris, præsertim super strata Fucorum putrescentia, foliis, caule et valvulis seminiferis, crassis et valde succosis luxuriant. Huc igitur citari potest *Sagina stricta* Fries; *S. procumbens* β. Fries Nov., *Montia fontana* β. *major* etc.

## §. 40.

Vegetatio *continentalis*, est vel *campestris*, vel *sylvestris*, vel *montana*, vel denique *alpina*. In his campestris medium tenet, ideoque producendis varietatibus minus apta. Quare in dijudicandis formis, potius ea, quæ locis campestribus nascuntur, tamquam primaria existimanda. Nonnulla tamen exempli causa citare non pigebit. *Veronica spicata* α.; *Valeriana officinalis* β.; *Heracleum sphondylium* β. *angustifolium*; *Thalictrum simplex* β.; *Vicia cracca* β. *tenifolia*; *Trifolium procumbens* β. etc.

§. 41.

Vegetatio *sylvestris*, quæ vegetationi campestri et collinæ contraria habetur, in eo præcipue differre videtur, quod, cum neque ventus penetrare sylvas, neque solis æstus ardere, neque latices possint adimere terræ tempestates: vegetabilia in sylvis tenuiora, et quia illic tranquilla omnia, laxa et tamen erecta fieri animadvertuntur. In sylvis igitur plus est humoris, caloris autem minus, quam in aprico. Itaque plantæ in sylvis succosæ et tamen exiles, formandisque foliis potius quam fructui aptiores. Nam hic quoque regula valet, de qua supra diximus, ut, quo plus tribuitur foliis, tanto magis detrahatur fructibus.

§. 42.

Exempla vegetationis sylvestris. *Arundo sylvatica* β. *chalybea t)* in sylvis humidis umbrosis, unde panicula laxa, folia latiora etc. (Læst. V. A. H. 1825.) *Arundo lapponica* β. (Wahlenb. Fl. Sv.) in sylvis. *Poa alpina* β. *lapponum; Poa sudetica* β ; *Poa nemoralis* α.; *Triticum repens* β.;

---

*t)* Mea specimina ex Angermannia superiore certe *A. lapponicæ* proxima; nam et pilis copiosis, corollam subæquantibus prædita sunt, et calycibus obtusioribus. In *Arundine sylvatica* penecillus adest ad basin corollæ brevissimus. Ceterum in sylvis humidis atque umbrosis habitabant, nec "*in locis siccissimis*" ut Wahlenb. in Fl. Sv. dicit.

*Myosotis sylvatica* (Lehm. sec. Fr.); *Luzula parviflora* α.; *Luzul. campestris* β.; *Epilobium alpin.* β.; *Saxifraga Cotyledon* α.; *S. cæspitosa*, var. *inferior*; *Stellaria longifolia* (Fries *u*). *Lych-*

---

*u)* In Lapponia plane nullos invenio limites inter *St. longifoliam* et *gramineam*. Immo *St. uliginosa* var. *alpestris* (Hartm. Fl. Scand, quæ *St. uliginosa* Wg. Fl. L.; talis enim uliginosa, quæ in Svecia australiori, nullibi in Lapponia adhuc visa, quod equidem sciam), variis formarum modis *St. gramineæ* variationibus adeo appropinquatur, ut interdum sit difficile dijudicatu, utrum formæ quædam mediæ hujus an alterius sint speciei. Incipiens a *St. graminea*, var. *alpina* (Læst. V. A. H. 1825), cui calyces hujus ordinis obtusissimi, maximeque enerves, continuatur series per *St. gram.* β. *Dillenianam*, (*cui extremitates St. uliginosæ* β. *alpestris*, Hn. valde approximantur), indeque ad *St. longifoliam* accedens, *St. gramineam* α et *St. glaucam* præterire videtur, donec formam hujus ordinis maximam assequitur, cujus folia æque lata ac *St. Holosteæ*, sed breviora. Hujus formæ calyces optime evoluti, maximeque nervosi, et longe acuminati. Harum formarum flores, nunc terminales nunc laterales s. axillares; panicula nunc ramosissima, mox pauciflora; petalis calyce longioribus, mox brevioribus, postremum nullis (in umbrosiossimis). Sepala longe acuminata nervosa, mox obtusa et enervia. Folia ex oblonga in lanceolatam, per linearem in subulatam demum abeunt figuram. Planta inter pollicarem et sesquipedalem altitudinem varians. Harum itaque formararum nullus finis.

Multo mihi memorabiliores videntur variæ *St. crassifoliæ* formæ, quarum *St. uliginosa* var. *paludosa* (Læst. V. A. H. 1825) certe insignior est caule erecto, foliis ovatis, floribus terminalibus. Prorsus eamdem dedit Rev. Sommerfelt, foliis tamen lanceolato-oblongis, cui nomen *St. crassifoliæ* α. inscripsit; eadem forma, sed adhuc minor in paludibus, sphagno repletis, legitur in Lapponia Tornensi, floribus subterminalibus et petalis calyce constanter majoribus.

*nis dioica*, var. *sylvestris*. *Hieracium pellucidum* (Quod retractum sentio a Cl. Fries et ad H. murorum relatum, haud ægre feram; sed simul cum hoc multa alia quoque reducantur necesse est.). *Viola palustris* β (*Viola uliginosa* Hartm. Fl. Scand.), semper in sylvis subhumidis et juxta rivulos; unde omnes partes tenuiores, etiam calyx subacutus; at *Viola palustris* α. locis duris, primo quidem vere inundatis, unde tota planta glabra, sed mox exsiccatis,

---

Denique proxima æstate 1830, ad Karesuando ad fontes frigidissimas et in locis valde umbrosis lecta est forma quædam media, caulibus diffusis, pedunculis axillaribus unifloris, foliis cordatis, petala in hac quoque forma, quæ maxima est, calyce longiora. Ex his nonnihil recedit *St. crassifolia* α. (Fr. Nov.) e Scania, quæ foliis parvis lanceolatis acutis, caulibus diffusis, valde diversa videtur a *St. humifusa*, quam Rev. Deinböll retulit e Finnmarkia anno 1821, quæ descriptioni in Wahlenb. Fl. Sv. optime quadrat. Hujus folia omnium obtusissima, et calyces elliptici, obtusi; petala quoque obtusa, fere obovata, quæ a descriptione Cl. Fr. in Nov. n:o 131, ubi: *"Sepala lanceolata, acutiuscula, petalis acutis! breviora"* dicuntur, abhorret. De qua, cum neque ipse legi, neque loca vidi, nihil est, quod agam. Cetera vero, scil. *St. uliginosa* var. *paludosa* (mihi), *St. crassifolia* α. β. (Wahlenb. Fl. Lappon.), nec non *St. crassifolia* a. b. c. (Fries Nov.) speciem quodammodo efficere videntur. Denique *St. uliginosa* cum var. *alpestri* inter *St. gramin.* et *crassifol.* media, cujus character optimus: *"Petala calyce duplo breviora"* constanter adest in omnibus formis, quamquam petala in var. *alpestri*, sæpe desunt; cui insuper panicula terminalis est haud raro, ita vero, ut pedunculi semper foliolis sint suffulti.

unde omnes partes abbreviatæ, et calyx quoque obtusiusculus.

Ad regionem sylvatico-umbrosam pertinent: *Viola umbrosa v)*, *Viola canina γ.*, et imprimis *δ. x)*. Porro *Carex digitata*, respectu *C. ornithopodæ*; *Betula alba*, var. *pendulina*; *Salix pentandra β cuspidata: (Sal. cuspidata*, Koch.) in Vestrobottniæ sylvis; *Sal. nigricans*, foliis tenuissimis glabris, subintegris; *Sal. aurita* var. *umbrosa* germinibus glabris, foliisque lanceolato-oblongis glabris plicatis, in sylvis umbroso-humidis, (Piteå gl. stad); *Sal. livida* germ. glabr. foliis tenuissimis, pellucidis (Piteå et Karesuando) in sylvis umbroso-humidis *y)*. Ex quibus satis superque demonstrari opinor, plantas in sylvis umbrosis extenuari atque gracilescere solere; siccis autem apricisque locis abbreviari et solidiores fieri.

## §. 43.

Vegetatio montana est vel *collina* vel *rupestris*. Montes, sylvis umbrosis consitos, ad regionem sylvestrem refero.

---

*v)* Quamquam bene distincta videtur, ob locum valde umbrosum varietas V. hirtæ esse posset.

*x)* *Viola canina γ.* habet se ad *Violam caninam α*, ut *V. palustris β.* ad ejusdem *α*.

*y)* Omnia Salicum folia valde gracilescunt in sylvis umbrosis.

Montes aperti, nudi, non admodum prærupti, ad regionem collinam, cui regio campestris elatior haud absimilis, pertinent.

*Vegetatio rupestris*, in eo memorabilis est, quod plantæ australioris latitudinis, singulari quadam locorum natura, vel intensiore colore, in rupibus, meridiem versus pronis, sæpe vegetare animadvertuntur; quamquam in subjacentibus campis minime provenire possint. Quare hæc singularis rupium vegetatio, in geographica plantarum distributione, non est ad vegetationem totius regionis æstimanda.

## §. 44.

Vegetationis collinæ differentia in eo deprehenditur, quod plantæ propter tempestates nimiamve siccitatem, abbreviatæ, strictæ atque solidæ factæ, plus in genere fructui conferre, quam foliis tribuere videantur. Siccitate enim contrahuntur vasa, et tota minuitur planta. Folia alias plana, convoluta, eamque ob causam angustata, vel alio modo contracta evadunt. Materia mucilaginosa et glutinosa, aqua sua orbata, pubescentiam edit. Hinc vegetatio collina formandæ pubescentiæ aptissima, cujus rei exempla supra allata sunt.

## §. 45.

Exempla vegetationis campestris ac collinæ, quamquam supra nonnulla attulimus, pauca addere lubet, ut comparatio vegetationis sylvaticæ eo magis appareat. *Phleum pratense* β. *nodosum*; *Poa alpina* γ.; *Poa bulbosa* L. (an autem varietas sit *P. alpinæ*, incertum est. Certe *vivipara* in alpibus aliter sese habet). *Poa pratensis* β. γ. δ.; *Poa nemoral.* β. *glauca* et forte *cæsia* z). *Myosotis collina et stricta.* *Asperugo procumbens* var. *minima* a). *Luzula spi-*

---

z) *P. glaucam* et *cæsiam* in rupibus siccissimis abbreviatas atque strictas ad *P. nemoralem* pertinere, fere persvasum mihi habeo, nisi etiam *Poa angustifolia* ejusdem sit speciei. Certe *Poa serotina* e Lapponia conflnit cum P. nemorali. *Poa glauca* et *cæsia* in ipsis rupibus; *P. serotina* sub rupibus solo pinguido; *P. nemoralis* in umbrosissimis, obveniunt; alia forma, quæ maxime cæspitosa in pratis; rursus alia flosculis jam quinquefloris ad ripas fluvionum, quæ omnium maxima est, nascuntur; alia in pratis inundatis foliis setaceis, flosculis bifloris; alia in petris siccissimis, flosculis minutissimis, bifloris etc. Locis pinguidis atque umbrosis plumæ acutæ; siccissimis obtusæ observantur.

a) Caule pollicari, simplicissimo, erecto, foliis omnibus lanceolato-oblongis, in petiolum decurrentibus. Flosculi in summitate caulis inconspicui. Hab. in collis siccissimis Lappon. Tornensis ad Karesuando. Quamquam forma hæc fugacior sit utpote siccitate orta, tamen major inter hanc et Asp. procumbentem, in hortis luxuriantem, distantia, quam inter *Myosotid. strictam*, *collinam* et *arvensem*, quæ a loco aperte pendere videntur. Itaque mirabar, cum vidissem,

*cata*, var. *petræa b*). Cum his comparari possunt: *Spergula arvensis β. pentandra*, *(Potentilla collina?) Helianthemi* varietates incanæ. *Leontodon Taraxacum γ. Hieracium murorum α.* (quo ad *H. pellucidum*). *Gnaphal. uliginos.* var. *simplex* (Læst. V. A. H. 1825). *Juniperus communis* var. *nana* (ramul. squarrosis, foliis latioribus in monte prærupto Isjach Lappon. Pitensis); *Carex ornithopoda*, *Carex canescens subpedata* (vide infra) etc.

## §. 46.

*Regio alpina*, subdividitur in *nivalem*, *glacialem*, *alpinam* proprie sic dictam, *subalpinam*, *inferalpinam*, quibus regionibus diversa oritur vegetationis indoles, pro diversa locorum elevatione supra mare, sub certa orbis terrarum latitudine.

Regio *nivalis* ita definiri potest, quod ea sit regio summarum alpium, qua nix jacet intacta, i. e. nunquam solvitur. His regionibus nihil est, nisi non habitabile frigus; viventium aut vegetabilium vestigium nullum.

---

quid esset, nec devinare potui, antequam fructum subdenticulatum animadvertissem.

*b)* Culmo bipollicori setaceo, subbifloro, in monte Nammats Lappon. Lulens. 1821.

*Regio glacialis* ea pars est summarum alpium, qua nix cumulata vento nonnihil liquescit æstate, neque tamen amplius, quum superior plaga; unde subjacens stratum, aqua superne hausta, in montem excrevit glacialem. Nix tali modo concreta quotannis fere augetur. In hac regione Lichenes, nec non plantæ quædam vegetare solent, in primisque aqua nivali delectantur, ut *Agrostis algida*, *Ranunculus glacialis* etc.

Regio *alpina* pars est inferior alpium nuda, qua nives maxima parte quotannis solvuntur, unde vegetatio alpina, cujus vis in contrahendo ac minuendo sita est. Hic frutices subterraneæ fere, ramulis tantum foliisve de terra eminentibus; plantæ herbaceæ humiles sæpe in superficie terræ serpentes, floribus paucioribus, at respectu totius plantæ grandioribus, vi vegetationis *collectivæ*, qua plures quasi in paucis continentur. In hac regione partes plantarum abbreviatæ et incrassatæ observantur, unde folia crassiuscula et vulgo breviora.

## §. 47.

Ad regionem alpinam, præter ea, quæ supra memoravimus, hæc sunt deferenda. *Statice Armeria γ. alpina* (vide supra). *Polygonum viviparum β.*, *Stellaria graminea*

var. *alpina* (Læst. V. A. II. 1822). *Ranunculus auricomus* var. *alpestris* (Læst. l. c.). *Carex alpina* α. (Wahlenb. Fl. L.). *Carex saxatilis*, var. *rigida*, *Carex pulla* α., *Carex vesicaria* b. c. (infra). Huc pertinet etiam, per analogiam, qua gramina versus alpes grandiflora fieri solent, quamquam in ipsis alpibus non sit observatus, *Juncus nodulosus* var. *biceps* c).

## §. 48.

*Regio inferalpina* est quasi Salicum regio. Circa radices alpium, qua nives quotannis solvuntur, atque Salices *lanata*, *glauca*, *limosa*, *myrsinetes* etc. fruticeta constituunt semiorgyalia, quæ regio varietatibus formandis minus apta videtur, nisi quod Salices, quæ in sylvis plus quam orgyales sunt, hic breves obveniunt.

At Regio *subalpina* seu *betulina*, in qua Betula alba dominare cæpit, in eo memorabilis videtur, quod non solum plantæ mere alpinæ, in hanc regionem delatæ, grandescant; sed etiam, quod solum his regionibus præsertim circa radices alpium pingvissimum, æstusque solis

---

c) Capitulis binis, multifloris, quam in ullo alio Junco noduloso, grandioribus, capsula valde obtusa. (Conf. ulterius addenda III.)

in rupibus meridiem versus pronis, haudquaquam mediocris, alia vegetabilia huc usque translata, majora et vegetiora fieri videantur. Quæ ratio nonnunquam novarum specierum præbuit ansam; ex. gr. *Saxifraga petræa* (Wahlenb. Fl. Lapp.), *Gnaphalium norvegicum.* Retz., *Viola montana* Linn. *d*), *Myosotis alpestris* Hopp., *Potentilla alpe-*

---

*d*) De *Viola montana* nihil fere est, quod agam. Profecto nimis videar sapere, si de planta tam celebri, tamque multorum doctorumque virorum sententiis ac controversiis nobilitata, sententiam dicere auderem. — Planta Lapponiæ indigena, quoad in montibus nascitur, vel subrupibus meridiem versus pronis, qualitercunque *montana* est, id est foliis cordatis obtusis, petalisque latioribus. Verum enim vero, cum ex montana in paludosam abiit, ex. gr. ad ripas torrentium sæpius inundatas, in Lappon. Pitensi ad *Koroqueik* prope Brunskällan, et Arvidsjaur juxta Stenkärn, (unde figura in Bot. Sv. Tab. 682.), jamjam angustior facta est, foliis magis elongatis, ut plantæ terrestres juxta aquam crescentes vulgo fieri solent. Deinde adest in Vestrobottnia forma quædam longe minor, folis angustioribus subacutis, petalis quoque angustioribus et dilutius coloratis, sicut in vulgari canina, sed stipulis adhuc herbaceis dentatisve (in parœciis Luleå et Piteå). Mox canina incipiens juxta Umeå per Angermanniam etc. Stipulis jam setaceis etc. nulla non formarum specie ludens.

Nunc quisque suo utatur judicio, an sit specie diversa. Hoc tantum constare videtur, nostram plantam cum lactifloris nihil habere commune. An vero a varietatibus V. caninæ grandioribus tuto distingvatur, incertum est. Nam quod corolla grandior est, atque saturatius colorata, hoc quidem cum multis aliis Lapponiæ floribus commune habet. Quod autem ad stipulas attinet, non est ignorandum, hu-

*stris* (Haller fil.); et præterea variationes satis notabiles, ex. gr. *Erigeron acre* var. *glabratum* (Zetterst. Res. 2. p. 129.) *Cheiranthus alpinus*, (Wahlenb. Fl. L.): quæ omnia majora aut vegetiora facta sunt, ob solum pinguidum abundantemque aquam et calorem haud mediocrem.

Quod si hæc plantis meridionalioribus acciderunt, non est mirandum, si plantæ inalpinæ aliquanto magis grandescant istiusmodi locis, quarum exempla jam supra commemorata sunt. Ut ex. gr. *Saxifraga Cotyledon α.* Salices in alpibus humiles, hic sæpe arborescentes et verbo omnes plantæ alpinæ in regione subalpina grandiores sunt. Huc certe pertinet *Erigeron alpinum*, quia in et sub rupibus plerumque crescere videtur.

## §. 49.

Solum, quo nascuntur plantæ in duas commode dividi potest partes, quarum altera vegetationem constituit *terrestrem*, altera *aquatilem*. Differentia, quæ vegetationem terrestrem atque aquatilem intercedere videtur, consistit in eo, ut, cum terra sit solida, aqua autem fluida, illa plan-

---

jusmodi appendices sæpe luxuriosæ vegetationis indicium esse, aut pingvioris soli, quod ad radices alpium nimis sane.

tarum partes efficiat solidiores, simulque compactiores, et in latitudinem, magis quam longitudinem efformatas; hæc autem tenuiores, graciles nec non extenuatas. In hac soli varietate maxima plantarum dissimilitudo sita est.

## §. 50.

In vegetatione *terrestri* observandum est, quod terra, ratione *qualitatis* sit vel humida vel sicca, vel pinguida vel macra; ratione *substantiæ*, arenosa, glareosa, argillacea, calcarea etc., quarum rerum diversitate maxima vegetationis dissimilitudo oriatur necesse est.

Cum autem harum rerum adeo sint intricatæ ac controversæ rationes ut neque certos metari limites inter solum pinguidum et macilentum, vel inter terram humidam, siccam et aridam, quamquam maxima sæpe inæqualitas gignitur vegetationis ex minima soli locique differentia; neque continuam formarum seriem, qua extrema cum mediis, vel minima cum maximis continentur, aliter, quam in ipsa natura demonstrare possimus, quum omnia conferre et nominatim commemorare impossibile foret: satius duxi extremas tantum, quæ ex diversa soli locique indole oriuntur, formas, paucis illustrare exemplis, ut appareat, quanta sit

convenientia inter causam atque effectum, inter plantam atque locum.

§. 51.

Exempla varietatum, quæ ob nimiam siccitatem exstitisse videntur, jam supra sunt maxima parte commemorata (§. 45.). Pauca tantum subjungere liceat. *Tillæa aquatica β. prostrata. Callitriche verna α. "foliis nunc omnibus subrotundis."* Fries Nov. p. 280, etiam Lapponiæ sic obvenit. *Arbutus Uva ursi* var. foliis obovato-subrotundis in collibus siccissimis arenosis. *Agrostis rubra*, var. *pumila*. (Cfr. Wahlenb. in Sv. Bot. sub Agrostide rubra). *Festuca duriuscula* (L. Spec. Pl.); *Festuca rubra* var. *collina e*); *Plantago lanceolata montana*, (spicis globosis, scapo filiformi, foliis lineari-lanceolatis trinervibus, tota planta valde gracilis et

---

*e)* Cæspitosa, foliis omnibus convolutis, calycibus ovatis, obtusis si speciminibus a Cl. Fries ad me missis credendum, *Festuca duriuscula* ejusdem, *Festucæ rubræ* varietatem, in omnibus collibus arenosis vulgarem, in Lapponia saltem exhibere videtur. Ceterum formarum nullus finis est. Nam præter varietatem *collinam*, quæ ob glumas calycis mirandum in modum abreviatas atque obtusas memoria digna videtur, etiam habemus *aliam*, foliis omnibus planis, quæ Bromi speciem habet; *aliam* glumis omnibus muticis; *aliam* glumis villoso-pubescentibus. Neque *Festuca ovina* melior, quæ multas formas in Lapponia offert.

pumila; in monte Indalsberget Norvegiæ 1819). *Violæ caninæ* formæ minimæ, quæ sub *V. canina δ.* (Fr. N.) comprehenduntur. *Epilobium montanum* var. *rupestre f*). *Epilobium palustre* var. *ripense* (foliis inferioribus obovatis, in ripis mox exsiccatis ad Karesuando); alia forma in paludibus est foliis linearibus denticulatis; alia foliis integerrimis. *Lychnis alpina* var. *gracilis* (caule spithamæo, filiformi, panicula laxa pauciflora, in ripis arenosis, siccis, quo aqua non pertingit, quæ forma Sveciæ plerumque obvenit. Cfr. Wahlenb. in Sv. Bot. sub Tab. 693.). *Polygonum Persicaria β. incanum.* *Juncus stygius* var. *subcompositus*, (major, panicula subcomposita, locis siccioribus ad Karesaundo 1828) *Stellaria uliginosa*, var. *alpestris* Hartm. in collibus locisque siccioribus. Quomodo plantæ uliginosæ, montanæ fieri possunt jam supra (§. 7.) ostendimus. *Ranunculus acris* var. *collinus* caule filiformi, unifloro, spithamæo, locis exsiccatis in Lapponia sylvatica alibique. Alius est Ran. ille *montanus*, qui in alpibus uniflorus est, sed flore duplo grandiore, foliis omnibus obtusis; de quo supra (§. 10) mentionem fecimus. *Ranunculus repens*, var. foliis tantum tripartitis, pubescentibus; forma pumila, ad margines lacu-

---

*f*) Spitamæum, foliis sublanceolatis, remote dentatis, caule filiformi: in monte Nammotsch 1820.

narum exsiccatarum. *Hieracium sylvaticum* var. *montanum* (caule unifloro, planta spithamæa). *Hieracium sylvaticum δ.* (Læst. V. A. H. 1825); *Hieracium murorum β. collinum*, (Læst. l. c.), aliæque formæ montanæ ejusdem generis. *Leontodon Taraxacum* var. *lævigatus et obliquus* (Fries Nov.), *Apargia autumnalis*, var. *foliis pinnatifidis*, pinnis lanceolatis; quæ omnia nimia siccitate et sterilitatæ macerata, folia rite explicare nequeunt. Horum folia in uliginosis rursus confluunt, unde *Leontodon palustre*; *Apargia autumnalis* var. *salina*; item *Carduus heterophyllus*, foliis pinnatifidis, locis siccioribus, etc. Cum his comparari possunt, *Carex limosa*, var. *irrigua*, locis siccioribus ad margines paludum, et var. *rariflora* locis exsiccatis et turfosis; *Carex dioica* var. *parallela*, solo sobuloso duro et celeriter exsiccato, cujus folia hanc ob causam abbreviata, et canaliculata, in aquosis rursus confluunt, et una cum caule filiformes fiunt, sicut multa alia vegetabilia, gracilescere solent in aqua. Sic *Carex dioica α.* foliis canaliculatis invenitur locis duris et exsiccatis, cauleque sulcato; (triquetrum vero numquam vidi). Quod autem ad capsulas attinet, non est oblivisccndum, quomodo *Carex canescens* capsulis deprehenditur angustioribus et acutis in siccioribus locis; in paludibus autem profundis capsulis late ovatis legitur, pari moda *C. dioica*, in palu-

dibus foliis cauleque filiformibus, capsulisque latioribus invenitur, locis autem durioribus et celeriter exsiccatis folia canaliculata, culmus sulcatus, capsulæque angustiores evadunt. Item *Carex panicea* var. *sparsiflora*, quæ in Lapponia usque in montes collesque adscendit, foliis planis est, capsulisque angustis; in paludibus limosis rarius provenit foliis canaliculato-triquetris, capsulis tumidis obtusisque; quibus omnino constare videtur, carices quo ad folia gracilescere in aqua, ut gramina vulgo, (Cfr. §. 27) solent; capsulas autem breviores fieri.

§. 32.

Quæ sit differentia vegetationis quo ad vestitum, magnitudinem ceterasque plantarum partes, ex humido vel sicitate oriundæ, jam supra breviter ostendimus. Quod reliquum est, breviter absolvere canabor. Plantæ terrestres gracilescunt in aqua, cujus rei exempla vide supra (§. 27). Accedunt *Galium palustre* var. *serpens*, caulibus serpentibus diffusis, setaceis; foliis sublanceolatis quam in vulgari, duplo minoribus. A *Galio trifido* vix nisi flore grandiore dignoscitur. Hab. in fossis limosis, quibus exsiccatis, hæc varietas serpit inter carices et muscos. *Stellaria graminea*, var. *subuliginosa g)* foliis lanceolatis acuminatis, peduncu-

---

*g)* Conf. ulterius addenda IV.

lis axillaribus, subunifloris; petala sepalis, acutis vix nervosis longiora. Hab. locis umbrosis, subuliginosis Lappon. Tornensis ad Karesuando frequenter. Ut *St. uliginosa* locis siccis ad St. gramineam, sic *graminea* locis uliginosis ad uliginosam vergere videtur. *Barbaræa vulgaris* var. *fontana*, siliquis filiformibus, planiusculis, nervo dorsali obsoleto. Hab. locis aquoso-spongiosis circa fontes frigidas. Hujus siliquæ omnino *B. præcocis* sunt, at folia et habitus *B. vulgaris;* periculum est, ne omnes sic dictas species Barbareæ annihilare possit. Nam *B. patens* locis aridis, duris, quasi indurata, siliquis brevioribus obvenit, et quia semina his locis citius maturescunt vel etiam grandescunt, extenduntur valvulæ siliquarum, unde tetragonæ factæ sunt. At locis aquosis gracilescit planta, luxuriant folia; semina sero maturanda, etiam minora sunt, vi legis naturæ, de qua supra (§. 27) diximus: detrahi fructui, quo magis vigeant folia, cujus rei exempla in aliis vegetabiliis exstant (Cfr. quæ Wahlenb. in Sv. Bot. de Nasturtiis agit, Tab. 694 et seqq., quo quidem loco multa præclare de plantis amphibiis exposuit). Ut *Nasturtium palustre* siliquis turgidioribus; quia locis jam media æstate exsiccatis, et *Nasturtium sylvestre* siliquis gracileseentibus, quia locis subaquosis sterilissimisque nascitur, ita *Barbaræa* locis aquosis vel tota

æstate irriguis, simulque frigidis, germinibus sero maturescentibus, nec non minoribus, eamque ob causam siliquis tenuioribus s. subfiliformibus instrui potest. Itaque *B. præcox*, immo etiam *B. parviflora* (Fries Nov.) leviores esse varietates possunt, quam quis, primo obtuitu crederet, quarum illa "*in fossis*" dicitur crescere; hæc "*in spongiosis irriguis*", ipso loco natali cum mea varietate *fontana* optime congruit, unde petala meis quoque speciminibus *lineari-oblonga*, et pallida erant. Sic locus non modo speciem, sed etiam genus mutare potest (Cfr. Wahlenb. in Sv. Bot. sub Cardamine petræa). Istuc est: *Sapere aude.*

## §. 55.

Solo pinguido luxuriant plantarum partes, inprimis folia ac caulis; quo facto fructui nonnihil detrahitur. Folia tali solo laccrantur, caulis plerumque ramosior fit. Tota demum vegetatio sic novis incrementis augetur, ut partes accessoriæ, quæ solo sterili numquam apparuere, exinopinato prorumpant. Exempla hujus rei pauca proferre non pigebit. *Poa alpina* β.; *Poa annua* var. *fimetaria*, culmo subsetaceo flaccido, spiculis minutis trifloris, flosculis a se invicem remotis, i e. vix contiguis. In fimetis frequenter. *Triticum repens* β. sub rupibus, quo solum semper pinguis-

simum est; unde forma hæc qua spicam gracilior, sed qua folia maxime luxurians. *Plantago lanceolata* var. *altissima* Liljebl., *Campanula rotundifolia* var. *graminifolia* foliis caulinis gramineis, longissimis; laciniis calycinis setaceis corollam æquantibus; loco nimis pinguido et umbroso, Nordlandiæ, Romdalen. *Stellaria graminea* var. *pinguida*, foliis lanceolatis etc. (vide supra p. 261 not. *u*); folia hujus dilatari videmus loco nimis pinguido, quod in aprico nascitur. Sin autem in occultis ac umbrosis esset, profecto folia totamque plantam attenuari videremus, sicut var. Campan. supra commemorata.

Huc pertinent, *Rubus arcticus* var. *caule bi-trifloro* et var. *flore pleno*, locis pinguidis; *Hieracium murorum* maxima forma, caule superne ramosissimo, et *Hieracium alpinum*, caule subramoso et folioloso, nec non elongato: (*Hieracium alp.* var. *fuliginosum*, Læst. V. A. H. 1826), locis pinguidis etiam in ipsis alpibus, quo greges rangiferini pernoctarunt; unde Fig. in Sv. Bot. Tab. 644 fere solito major, quia typus e loco fertiliori erat. In desertis autem Lapponiæ sterilissimis, quo non licet aliis, quam Licheni rangiferino luxuriose vivere, *Hieracium alpinum*, ut multa alia, simplex, abbriviatum, scapo etiam nudo, obvenit. Pari modo *Hieracium sylvaticum* (*boreale* Horn.) locis ferti-

lioribus maxime ramosum, in siccis, arenosis, sterilissimisque uniflorum evadit. *Sonchus sibericus* locis fertilioribus foliis runcinatis est, alias denticulatis. Quo etiam citari possunt, *Viola biflora* var. *sexflora*, *Phleum alpinum* var. *trispicatum* (Vet. A. H. 1825) *Angelica Archangelica*, umbella foliacea; *Geum rivale* flore duplicato, et calyce foliaceo; quæ tantum enormitates sunt, ob solum pinguidum luxuriantes.

## §. 54.

Variationes plantarum, nimia soli locive sterilitate oriundæ, nuper allatis contrariæ sunt, et in superioribus §§. (45, 51) maxima parte commemoratæ, ut variationes graminum abbreviatæ atque pumilæ; *Plantago major β. scopulorum*, *Asperugo procumbens* var. *minima* (§. 45). *Luzula spicata* var. *petræa* (ibidem) etc.; quæ satis superque commonstrant aberrationes sterilitate ortas. Accedunt, *Rubus saxatilis* var. *spinescens*, ad ripas glareosas, *Carex acuta* var. *ripensis*, *Carex pulla* var. *subdivisa*, aliaque, quorum diversitates vide infra.

## §. 55.

Vegetatio *aquatilis* est vel *marina* vel *lacustris*, *fluviatilis* et *stagnatilis*, quas excipit *limosa*, *paludosa*, *uliginosa*

et s. p. Harum differentia non est vilipendenda in plantis subaquaneis limosisve scrutandis. Multis jam supra exemplis ostendimus, plantas subaquaneas tenuiores esse in mari et in aqua manante, quam alibi.

In stagnis nascuntur plantarum amphibia, quæ, quia nunc in aqua, nunc in terra proveniunt, hanc ob causam maxima sæpe dissimilitudine sese præbent. In his igitur speciebus separandis, quæ sunt plantarum amphibia, magnopere cavendum, ne externa species fallat, inque errorem inducat.

§. 56.

Duo sunt paludum genera, quæ in opusculo de Agricultura Lapponiæ, fusius tractare studui, quorum alterum, aqua tota fere æstate inundatum, Caricum est præcipicum elementum; alterum genus sphagnis est repletum, aquæ quidem non immersum, sed semper humidum, quæ quidem duo paludum genera maxima interest vegetationis differentia, sæpe minimo locorum intervallo. Sic *Carex limosa* supra sphagna putrida fit *rariflora;* et in ipso termino sphagni fit *irrigua; C. panicea*, locis siccioribus *sparsiflora*, in limo fit *tumida* (vide infra), in palude profundissima *livida*, et in ipso termino sphagni, nisi valde hal-

lucinor, *laxa! Betula alba*, super stratum sphagni, subterraneo gelu refrigeratum in *fruticosam* vertitur, et eadem analogia *Salix majalis* biorgyalis ad ripas fluminum, solo lapidoso, sphagno frigido et polytricho gelido consito fit *arbuscula: Salix aurita*, alias arborescens (in sylvis Vestrobottniæ), *β. paludosa* in paludibus Lapponiæ fit subrepens, germinibus foliisque glabris. Pari modo Salices omnes in paludibus serpunt. Quæ *Pini sylvestris* his locis facies? Misera, pumila, tortuosa, ut Svecis cognomine ignominioso *Gårtall* appelletur. Tanta est vis paludum vegetationem reprimendi, ut omnia fere vegetabilia serpant humi, subterraneoque torpescant gelu. Atqui hic tamen *Rubus* ille *chamæmorus*, floribus niveis elegans, fructuque sapidissima gratus viatori: hic *Andromeda* floret, formosa illa, quam divus ille Botanices pater Linnæus summis fert laudibus: hic *Pinguicula* illa *villosa*, qua nihil modestia potest esse svavius.

## §. 57.

Carices, quarum tanta est Lapponiæ copia, variis modis variare, jam supra sparsim Lectores certiores feci, quare idoneum rati sumus, heic nonnullas maximeque notabiles varietates commemorare, quo magis appareat hujus

generis scrutatoribus, qui sectionibus nimis sæpe artificialibus, spicarum numero exstructis, quasi limites præscripserunt naturæ, permultas esse species, quæ his limitibus contineri nequeunt.

Caricis canescentis variæ formæ sed magis notabiles sequentes sunt:

1:mo *submuricata*, spiculis subsenis contiguis, superioribus in spicam elongatam confluentibus; foliis latiusculis, planis, culmo longioribus; infima spicula bracteata, bractea setacea spiculam supremam æquante. Hab. locis subhumidis umbrosisve. Specimina legi ad Hofberget Jemtlandiæ 1819.

2:do *subelongata*, culmo pedali foliis breviore; spiculis elongatis, oblongis, basi angustatis; capsulis ovatis, acutis sqamas æquantibus, bractea nulla. Hab. juxta margines paludum, Lapponiæ et Vestrobottniæ frequenter. Carici elongati subsimilis.

3:tio *subloliacea*, spiculis quaternis, globosis, inferioribus haud contiguis; capsulis ovalibus, obtusiusculis, apiculatis; ore subintegro. Hab. in paludibus aquosis Lapponiæ passim.

4:to *alpicola*, spiculis inferioribus sæpe compositis, superioribus in spicam ovatam congestis; capsulis angustioribus acutis margine serrulatis, ore evidentius bifido; culmo sesquipedali. Hab. locis elevatis apricis per Lapponiam ubique. In his n:o 4. cespitose crescit, aliæ magis segregatæ.

Carex panicea, inter carices valde polymorpha, cujus notabiles varietates sunt:

1:mo *panicea* α, spicis exserte pedunculatis, contiguis, erectis; capsulis inflatis obtusis, ore subintegro, culmo abreviato circiter semipedali, inferne folioso; foliis planiusculis. Hab. in Svecia australiori. Bracteæ foliaceæ, spicis breviores. Capsulæ albescentes.

2:do *tumidula*, spicis subincluse pedunculatis, distantibus (interstitio bipollicari inter spicas) ovato-oblongis; capsulis inflatis excurvis, violaceo-rubris, ore prominulo integro; culmo infernc foliaceo, subacutangulo, foliis lineari-angustatis, canaliculatis, sursum triquetris, angulis acutissimis; bracteis foliaceis, spicas superantibus, acuminatis. Hab. in paludibus uliginosis rarius, ex gr. ad *Njawe* Lappon. Lulensis, et *Maunu* Lappon. Tornensis. Quoad folia

bracteasque *C. lividæ* simillima, sed culmo pedali, spicisque distantibus diversa.

3:tio *sparsiflora*, spicis remotis, exserte pedunculatis, sparsifloris; capsulis oblongis (haud inflatis) viridibus; ore elongato, unilobo et bidentato; bracteæ longitudine pedunculorum, lanceolatæ. Culmus inferne foliis duobus brevissimis, lanceolatis planiusculis, apice navicularibus cinctus. Folia radicalia planiuscula, seu marginibus complanatis et medio tantum canaliculata, flaccida, ad terram declinata. Hab. in ripis et pratis siccioribus totius Vestrobottniæ et Lapponiæ usque ad alpes altiores. *C. laxæ* valde affinis.

Carex cæspitosa, culmo subnudo (id est duobus tribusve foliolis brevissimis, alternis, culmi infimam partem vagina truncata amplectentibus), foliis duplo triplove longiore, spicis femineis binis, oblongis, numquam, quod sciam, androgynis; mascula unica; culmo foliisque radicalibus flaccidis. Hab. per universam Sveciam, in Lapponia rarius. Foliola culmi brevissima, bracteæ *auriculato-aristatæ*, spicam æquantes.

β. polymorpha, foliis longitudine culmi, vel interdum longioribus, raro brevioribus; bracteis foliaceis, spicis

duplo triplove longioribus; spicis femineis superne androgynis. Hujus formæ sunt: a) *campestris* spicis femineis binis, masculisque binis, aut femineis ternis, mascula unica; culmo crassiusculo, semipedali vel amplius. Hab. in pratis et campis graminosis subhumidis ubique. b) *lutescens* foliis lutescentibus, latiusculis, spicis femineis binis oblongis. Hab. in pratis uliginosis et juxta rivulos præsertim in Lapponia. Quia mollior, bonum pabulum præbet. a et b nunquam cæspites formare videntur, sed separatim crescunt. c) *cæspiticia* culmo foliisque elongatis laxioribus; spicis femineis subbinis. Squamis aterrimis. Hab. in omnibus paludibus uliginosis, ubi cæspites pedales vel altiores facit. d) *nardifolia* culmo foliisque filiformibus longissimis. Hab. in umbrosis occultis Lapponiæ etc. Has formas observandas putavi, quia non minimi sunt in oeconomia momenti. Omnes ad varietatem $\beta$. pertinentes formæ, spicis androgynis, bracteis foliaceis, culmoque foliis longis prædito dignoscuntur, quamquam exstremæ ad *strictam*, *acutam* et *saxatilem* adeo approximantur, ut determinatu interdum valde sit difficile, utrum hujus an alterius sint individua.

Carex stricta, dignoscitur præcipue capsulis dense imbricatis adpressis, utrinque compressis et nervosis.

Hujus formæ sunt 1:mo *stricta* proprie sic dicta, capsulis squamis longioribus; spicis cylindricis, sessilibus, androgynis.

2:do *media*, capsulis squamis multo brevioribus; spicis elongatis subpedicellatis, numerosis; foliis latioribus. Antecedente major. Est quasi media inter acutam et strictam.

3:tio *fluviatilis*, spicis femineis oblongis, distantibus; bracteis longissime foliatis angustatis; masculis numerosis (subquaternis) et longe a femineis remotis; capsulis dense imbricatis, adpressis, utrinque tricostatis, squamas superantibus. Hab. in Svecia media circa Norrköping etc. Specimina cum denominatione det. Cl. Dom. Indebetou. Nulla stricta hactenus in Lapponia visa.

*Carex acuta* differt in primis capsulis tumidis, rachidi non adpressis; demum rufescentibus. Cujus formæ sunt 1:mo *acuta* α, spicis masculis pluribus; femineis pedunculatis; capsulis tumidis obtusis, squamis violaceo-atris, capsulas æquantibus.

2:do *ripensis*, masula unica; spicis femineis suboblongis sessilibus; capsulis angustatis, acutiusculis, subcompressis, ustulatis; culmo abbreviato stricto. Hab. ad ripas glareosas fluminum ad Kätkesuando, et Kuttainen frequen-

ter (Lappon. Tornensis), quo tamen ita cum *C. saxatili* et *cæspitosa* confluit, ut ego saltem distingvere non valeam. Omnes autem in his ripis promiscue crescunt.

*Carex saxatilis* ab his qualitercunque differt 1:mo *rigida*, culmo semipedali rigido; spicis femineis binis oblongis, approximatis; bracteis auriculato-cuspidatis spica brevioribus; squamis acutis atris. Hab. super saxa in summis alpibus.

2:do *saxatilis* α, bracteis foliatis; spicis femineis oblongis remotiusculis. Vulgaris forma in alpibus.

3:tio *inferalpina*, culmo pedali; spicis pedunculatis elongatis subandrogynis; bracteis foliaceis; sqamis lanceolatis, capsula longioribus. Hab. in subalpinis. His accedit *Carex aquatilis* var. *subacuta:* spicis sessilibus, superioribus androgynis; squamis lanceolatis cuspidatis, capsula multo longioribus. Hab. ad ripas fluminum in Lapponia Tornensi. C. acutæ adeo similis, ut vix nisi varietas ejus; tamen ob culmum obtusangulum, capsulas compressas etc. C. aquatili proxima. Sed etiam *C. salinæ* tam similis, ut nihilo nisi spicis sessilibus et magnitudine differat. Folia plana latiora, præsertim bracteæ. Squamæ vi-

ridi-rufescentes. C. aquatilis differt præcipue squamis capsula brevioribus, foliis subconvolutis etc.

*Carex vesicaria α. calcifœnum*, spicis masculis pluribus, femineis pedunculatis, longe a se invicem remotis, cylindricis; folia lata ut totum gramen molle. Hab. in sylvis umbrosis; juxta lacunas etc.

*β. inalpina*, spica feminea subsolitaria, atrofusca, ovata; foliis angustis convolutis. Hab. in ipsis alpibus ad Virihjaur.

*γ. subalpina*, spica mascula solitaria oblonga; femineis breviter pedunculatis, oblongis, approximatis, erectis. Capsulæ inflatæ rostro breviore; folia subconvoluta; culmus vix pedalis. Habitat in alpibus.

Huic valde affinis est *Carex pulla*, cujus formæ sunt, 1:mo *subsylvatica:* spiculis masculis binis; femineis etiam binis, ovalibus sessilibus, approximatis, culmo pedale, vel paulo amplius. Folia lata complanata. Hab. in sylvis subalpinis, ex. gr. ad Tarrejaur Lappon. Lulensis.

2:o *pulla α.* spicis approximatis ovalibus, sessilibus; bracteis cuspidato-setaceis, vel subfoliaceis vel nullis. Mascula contigua, oblonga. Hab. in alpibus.

3:tio *subdioica*, culmo spithamæo; foliis subfiliformibus; spica mascula solitaria, femineis nullis. Hab. in summis alpibus haud raro. Num hæc fuit *C. Vormsköldiana* Hartm. Fl.? *Carex pulla* varietas *vesicariæ* e longinquo esse potest, at *Carex rotundata* magis aperte cum *C. ampullacea* confluit.

## §. 58.

In geographica plantarum distributione, quæ sub excursionibus in Lapponia Tornensi et circa Lyngenfjord, annis 1826—30, observavi, postremum commemorare licet: *Utricularia vulgaris*, Karesuando, Hämhänjänkä. *Utr. minor*, ibidem. *Scirpus acicularis*, Karesuando, in ripis inundatis frequenter. *Molinia aquatica*, in Lyngenfjord. *Potamogeton flexicaule*, Karesuando, Närva. *Gentiana glacialis*, ad litora maris descendens in Lyngenfjord. *Saxifraga cernua* β. caule superne ramoso; petalis brevioribus; *"germine subtus magis tumescente"* Wahlenberg Fl. Sv. in alpibus Tornensibus in Råbdåvanka multis locis, ubi S. cernuam α. non vidi. *Alsine rubella*, in Råbdåvanka loco Storminkendä dicto. *Cerastium viscosum*, Karesuando multis locis. *Gnaphalium carpaticum*, ad Tjàtjà supra Lyngenfjord parcius. *Carex microstachya*, Karesuando, Hämhän-

jänkä. *Carex frigida* Host (C. fuliginosa Hoppe?) ad Tjàtjà supra Lyngenfjord 1829 et 1830, copiose. *Carex laxa*, Karesuando, in omnibus paludibus uliginosis, præsertim ad margines Sphagni copiose. *Betula alba* δ. *intermedia* (fruticosa), Karesuando, Hämhänjänkä, super tumulos s. valles Sphagni, quo subterraneum gelu non liquescit. *Salix arbuscula*, *minima* ad Tjàtjà, super Lyngenfjord. *Salix versifolia*, Karesuando, in paludibus virgatis, frequenter. *Polytrichum lævigatum*, Karesuando in ripis fluminum, passim. Sed rarius fructificat.

## §. 59.

Exempla vegetationis Lapponiæ comparativa, cujus promissionem initio hujus opusculi fecimus, pauca tantum præstare licet.

Regio subsylvatica circa Karesuando (olim Enontekis) in ultimo termino Hordei vulgaris sita est. Itaque utile fere arbitror scire, quænam plantæ australes, in aliis Lapponiis vulgares, hcic desiderantur. Veronica officinalis. Scirpus palustris et lacustris. Milium effusum. Arundo phragmites. Melica nutans. Galium boreale. Plantago major. Campanula rotundifolia. Alisma plantago. Daphne

Mezereum. Paris quadrifolia. Pyrola rotundifolia. Rosa spinosissima. Rubus Idæus. Geum rivale. Actæa spicata. Prunella vulgaris. Vicia cracca. Trifolium pratense et repens. Tussilago Farfara. Carex flava. Urtica urens et dioica. Pinus Abies, rarissime ad Koravara. Salix pentandra. Polypodium fragile et Filix mas. Præter Veronicam officinalem et Scirpum lacustrem, omnes supra memoratæ plantæ, etiam ad Quickjock vulgares sunt. Itaque Hordeum ibidem sæpius maturescit, quam in Karesuando.

## §. 60.

Plantas alpinas ad terminos agrorum circa Karesuando non vero ad Quickjock descendentes, sequentes observavi. Pinguicula alpina. Avena subspicata. Chamæledon procumbens. Sibbaldia procumbens. Juncus biglumis. Epilobium alpinum α. Carex microglochin. Carex saxatilis. Salix herbacea, polaris, myrsinites. Itaque hic quoque diversitas observatur. Ceterum observandum est, regionem Karesuandensem longe ex alpibus esse remotam; Quickjockensem vero sub ipsis alpibus esse sitam; unde plantæ alpinæ ibidem celerius descendere, quam ad regionem circa Karesuando, possunt.

## §. 61.

Plantæ singulari locorum natura, nec climate pendentes, sequentes circa Quickjock nascuntur, quæ in Lapponia Tornensi, vel in regione Karesuandensi non sunt repertæ. Poa alpina. Myosotis deflexa. Primula farinosa β. Carum Carvi. Saxifraga Cotyledon, nivalis, cernua, petræa. Lychnis dioica. Rubus saxatilis α. Aconitum Lycoctonum. Sonchus alpinus. Viola montana. Carex lagopina. Carex alpina. Polypodium ilvense, hyperboreum, montanum. Polypodium spinulosum, Filix mas. Ceterum musci frondosi, et fungi, qui circa Quickjock in sylvis umbrosis vegetare solent. Verum in regione Karesuandensi, qua sylvæ jam evanuere, omnes plantæ, loca occulta et umbrosa amantes, non iveniuntur. Ceterum in hac comparatione nullas alias plantas, quam quæ in confiniis agrorum nascuntur, enumerarare volui.

In regione Karesuandensi, quæ subcampestris maximeque paludosa haberi potest, hæc proveniunt, nec ad Quickjock. Veronica longifolia. Potamogeton sparganifolius. Polemonium. Chrysoplenium alterinfol. Saxifraga Hirculus. Stellaria crassifol. var. paludosa. Rubus saxatilis var. castoreus, ad Quickjock haud visum quamquam in Peura-

jaur. Nymphæa lutea β. pumila. Thalictrum flavum. Ranunculus hyperboreus et aquatilis β. subaquaneus. Sonchus sibericus. Carex paniculata β. Carex rotundata et laxa, quæ sunt paludum quasi summum fastigium. Sed finem huic opusculo imponere coactus, vegetationem comparativam, respectu climatis ac agriculturæ, fusius alio loco exponere volo.

Karesuando in Lapponia Tornensi die 27 Julii
Anno 1831.

## ADDENDA.

I Ad pag. 242. not. *x*. *(Potamog. sparganifolius)* denique hac æstate (1831) seminibus lectus, quæ minuta, compressa, dorso acuta nec admodum carinata erant, stigmate persistente, sic scilicet, ut pars inferior constabat semine, pars autem superior stylo. (An autem vere matura fuerint, incertum est, nam intra calycem erant inclusa). In inferioribus regionibus secus flumen Tornense hunc frustra quesivi, et tantum inveni inter Kuttainen et Maunu, trium miliariorum spatio distantia, frequenter multisque locis.

II. Pag. 257. not. *q*. Quod si in ipso litore marino crescit, omnino succosior Airâ cæspitosâ fieri potest, tumque ad sequentem §. pertinet; eadem est Caricis salinæ ratio.

III. Pag. 268. not. *c*. *(Juncus nodulosus* var. *biceps)*. Sic anno 1830, cum æstas et pluvia abundaret. Sequente vero æstate (anno 1831), quæ post hominum memoriam his regionibus (in Lapponia totaque Vestrobottnia) siccissima calidissimaque fuit, idem Juncus eodemque loco, quo antea lectus, non *biceps* sed *uniceps* fuit: id est capitulo unico, terminali, subbifloro. Culmo pollicari. Pari modo antea ad Maunu ejusdem Lapponiæ Tornensis, et quidem locis siccioribus videbatur frequenter: capitulo unico terminali subtrifloro, et *Junco triglumi* adeo similis, cui etiam intermixtus erat, ut non nisi summa attentione et præcautione ab eodem distingueretur. Cum his formis, quæ ad multa millia leguntur, acutissimum quemque Botanicum fallere possemus, siquidem ad Juncum nodulosum, panicula interdum ramosissima præditum, istiusmodi formas pusillas pertinere nemo sane divinaret, nisi qui locos habitationis, transitus, investigando indubitabiles, continuamque formarum seriem viderit. Hæ formæ, seu *Juncus nodolosus* var. *uniceps* ad §. 51 referendæ sunt, quo quidem loco *Juncus stygius* var. *subcompositus* (§. 51) delendus, et ad §. 53 transferendus, utpote qui locis pinguidis obvenit, scilicet locis limosis, non quidem inundatis, sed a gregibus bovinis pin-

gnefactis, unde novis quasi incrementis auctus sit, quod hac demum æstate comperimus.

IV. Pag. 275—276. *Stellaria graminea* var. *subuliginosa* prorsus delenda, utpote ad Stellariam uliginosam pertinens.

V. P. 280. §. 56. Post *Caricem limosam rarifloram* etc. inseritur: *Eriophorum capitatum* var. *medium:* spica haud admodum capitata, squamis subhyalinis. In paludibus limosis. Eriphorum vaginatum locis turfosis sphagnoque repletis, squamis maxime acuminatis ac hyalinis instructus, per hanc formam mediam in Erioph. capitatum abire videtur locis sabulosis duris, quæ totam plantam abbreviatam, spicam capitatam, squamasque obscuriores reddunt.

VI. Pag 289. §. 58. *Agrostis spica venti* ad Torneå frequens. *Agrostis canina* in Karesuando. *Holcus atropurpureus* ad Muoniofors descendens. *Poa flexuosa*, Karesuando. *Glyceria distans*, Torneå. *Myosotis arvensis* et *lingulata* usque ad ÖfverTorneå. Prior in agris, altera ad ripas inundatas, quare mihi nihilo, nisi loco differre videntur. Nam *M. arvensis*, glabrescit in aqua, foliisque angustioribus instruitur, adeoque in *M. lingulatam* mutatur, sicut *M. silvatica* fit *palustris* in aqua. *Butomus umbellatus* et *Silene nutans*, Kemi. *Stellaria uliginosa* β. *paludosa* (Vet. A. H. 1825), cujus maximam formam nuperrime juxta Kemi legi. Monente Cl. Fries in literis, comparatisque speciminibus, a Rev. Sommerfelt sub nomine *St. crassifoliæ* α. missis, quæ omnino huc pertinent, ego quoque hanc supra ad St. crassifoliam retuli. Totus tamen habitus est Stellariæ uliginosæ, quamquam inflorescentia subterminali, petalisque calyce constanter majoribus semper differre, nec unquam cum varietate illa *alpestri* confluere videtur. Est itaque dubia vel inter *St. uliginosam* et *crassifoliam* quasi media, et ad hodiernam de specie ideam ab utraque diversa. Potest tamen esse St. uliginosæ varietas, siquidem petala, ut aliarum plantarum in septemtrione flores, grandiora facta ob lumen solare. *Lythrum Salicaria*, ad flumen Tornense usque ad Pello. *Rubus saxatilis* β. *castoreus* circa

flumen Muonio usque ad Kengis. *Ranunculus aquatilis* eradicatus a. *subaquaneus.* Hujus forma minima, b. *exsicatus* vix pollicaris ad ripas lacuum exsiccatas post defluxum aquæ florens caule filiformi depresso, foliis filiformibus, peltatis nullis, obvenit circa Karesuando. *Thalictrum flavum* cum variis formis, ad Th. majus et simplex accedentibus, obvenit circa flumen Tornense usque ad Karesuando. Thalictrum majus, ut videtur, nihil est nisi varietas *Th. flav,* quamquam, amisso specimine Th. majoris e Lapponia Kemensi, nihil certi de hac re statuere audeam. *Carex dioica* var. *monoica,* spica superne mascula, lecta ad Kemi 1831. *Carex vesicaria* var. spicis omnibus sessilibus, erectis; masculis verticillatis, subandrogynis; capsulis maxime inflatis subglobosis. Gramen maximum, foliis latis, lectum ad Kemi 1831. *Salix amygdalina,* Kemi haud procul ab ipso templo.

# PRIMORDIA DOMINATIONIS MURABITORUM

e libro arabico vulgo *Kartâs* inscripto,
auctore ABU-L-HHASSANO IBN ABI ZERA',
collatis codicibus Bodleianis, Leidensi, Parisinis
et Upsaliensi

edidit

CAR. JOH. TORNBERG
IN ACAD. UPSAL. LITTERAT. ARAB. DOCENS.

## PROOEMIUM.

Unicuique diligentius inquirenti rerum mutationes, quæ tot ac tantæ regna Africæ commoverint, religio vel potius ex ea profectus fanaticus quidam furor caussa omnium potentissima et frequentissima occurrit. Rem loquor adeo notam, ut, si exempla quæsiveris, longam regnorum seriem adferre liceat, Edrisitarum, Zeiritarum, Fatimidarum et aliorum, quæ omnia eodem ferme modo condita iisdem subsidiis aucta sunt atque amplificata. Nec aliter exstitit illud imperium, quod historici hispanica pronunciatione de-

cepti *Elmoravidos* vocant, rectius *Murabitun*, vel latine *Murabitorum* nominandum, apud Arabes etiam *Lemtunense* a tribu validissima omnium, quæ novam professæ sunt doctrinam, denominatum. Ab initiis exiguis, ut fit, ortum, mox in ingentem orbis terrarum partem vi insuperabili sese effudit. A'bd allah ben Jasîn Guzulensis prima regni fundamenta, Islamismo inter gentes Deserti incolas adhuc rudes prædicando, struxit anno Fugæ CCCCXXXIV (post Chr. nat. MXL$\frac{II}{III}$); belloque sacro, officio Muslimorum maximis præmiis digno, contra infideles nuntiando Lemtunam tribum e desertis eduxit. Armis suis, fide Muslimica magis magisque animos hominum incitante adjutis, in tantam mox evexit magnitudinem imperium, ut ipso moriente anno CCCCLI (p. Chr. n. MLIX) jam major Meghrebi pars potestati Murabitorum esset subjecta. Mox vero regnum novum in duas partes sese divisit. Nam anno CCCCLIII (p. Chr. n. MLXI), quum Abu Bekr ben O'mar, qui dux fuit eo tempore, in Desertum Nigritas debellandi caussa proficisceretur, Jusufum ben Teschfîn patruelem vel potius filium patruelis heredem instituit totius Meghreb, ipse autem cum magnis Murabitorum copiis Desertum petiit ibique variis Nigritarum gentibus devictis novum sibi comparavit imperium, quod nos incognitum latet. Ad hunc annum fragmentum libri Kartâs, publici juris nunc factum pertinet.

Jusufo enim ben Teschfîn regnante novam induit faciem regnum Murabitorum. Huic tanta obtigit felicitas, ut, postero anno urbe Merrâkesch (Marocco), sede regia, condita, iisque, quæ nondum in Meghreb erant occupata oppida, expugnatis, in Hispaniam transiit. Post pugnam apud Zalakam prope Badajoz (die XV mensis Redjeb anno CCCCLXXIX; p. Chr. n. die XXVIII Octobr. MLXXXVI), ubi Christianorum fregit potentiam, titulum Emir el Muslimin in futuræ magnitudinis præsagium sibi vindicavit et maxima Hispaniæ parte brevi potitus est. Sed quemadmodum vicissitudo in ceteris regnis, virtute hominis cujusdam conditis, successorumque imbecillitati fere continue expositis e rerum natura sequitur; ita etiam in excelso illo fastigio non diu mansit potestas Murabitorum. Alia enim secta, ejusdem fere originis, quæ, quia dogmate unitatis Dei præcipue innitebatur, nomen *Muvahhidun* (Unitarii), vulgo *Almohadi*, acceperat, vestigia legens Murabitorum, Meghreb et mox Hispaniam duce præclaro A'bd el Mumen occupavit et imperium illorum deinceps plane evertit. Reliquiæ tantum exiguæ, regibus Ibn Ghanijæ posteris, primum in oris Africæ maritimis ad Kabes parvam tenuerunt potestatem; unde a Muvahhedin ejectæ in Majorcam transmigrarunt, ubi usque ad annum DCIX (p. Chr. n. MCCXX$\frac{II}{III}$) regna-

runt. "Anno tandem DCXXXI (p. Chr. n. MCCXXX$\frac{III}{IV}$)", ait Ibn Khaldûn, "potestas Murabitorum e terra plane evanuit; tribus eorum, quæ Desertum petiverant, regibus Nigritarum subjectæ, consuetudines pristinas servantes ibi adhuc degunt" [1]).

Si Murabiti eam præcipue ob caussam memorandi nobis videantur, quod historia eorum fatis Europæ meridionalis sub spatio temporis haud brevi intime cohæserit, ideoque eæ res eorum gestæ præ ceteris adtentionem nostram ad se adliciant, quæ ratione quadam ad Europam pertineant; attamen aliæ non desunt caussæ, quæ primordia, explicationem et progressum talis dominationis cultum generis humani adtentius perquirenti summi faciant momenti. Et si ipsum spectaculum ejusmodi rerum vicissitudinis animos videntium adtentos reddat, necesse est; eo magis curiositas nostra est excitanda, si ad origines respexerimus hujus populi, cujus arma fidem Muslimicam inter Deserti populos adhuc ignaros et incolas montium Africæ barbaros propagaverunt, vacillantem in Hispania Muslimicorum potentiam sustinuerunt et impetum cohibuerunt Christianorum. Quamvis in diversas abeant partes scriptores, quorum testimoniis in hac re dijudicanda innitimur; omnibus rite perpensis concludere fas est, eam unam fuisse e fere

innumeris *Berberorum* tribubus, quæ, jam meridiem versus depulsæ, deserta invia montesque inaccessos inhabitant, olim autem per totam Africam septemtrionalem a mari inde Atlantico ad Nilum usque stationes habuerunt. Jam antea alia tribus Berberica, Zenata adpellata, Zeiridarum imperium condiderat; et Muvahhidun ipsi, ex alia ejusdem populi familia Mesmada vocata posterius sunt profecti. Nec parum contulerant Berberi ad regnum Edrisitarum condendum ac Fatemidarum constituendum. Ne itaque mireris, tantam gentem, quæ in fata populorum summam exercuit vim, doctorum oculos in se convertisse. Fuerunt, qui putarent Berberos aborigines Meghrebi fuisse; alii, non sine veritatis specie origines eorum a temporibus Karthagiensium repetentes, eosdem fuisse ac Numidas autumant [2]). At omnino confitendum est, notitiam nostram horum populorum, quamvis viri summi nominis disquisitiones de hac materie instituerint, eâ non ampliorem esse, quam Arabes quinque abhinc seculis habuerunt. Postquam his temporibus, expugnata a Gallis civitate Aldjiriana, Europæi propius ad Berberos accesserunt, vividior renata est cupido hujus populi cognoscendi. Quare effata etiam Arabum unicuique rem penitus perscrutanti in primis sunt perspicienda.

Inter alios [3]) rerum Africanarum scriptores, auctor libri vulgo *Kartâs* inscripti insignem sibi vindicat locum. Quum orationis simplicitas tum rerum narratarum manifesta veritas eum valde commendat. In urbe Fâs viventi prope ad ea loca ubi Berberorum tribus dominatæ sunt ei facile fuit certiorem quam alii notitiam de iis sibi comparare. At quamvis liber ejus a multis sit laudatus, fata scriptoris, ut viris de sua ætate bene meritis sæpius accidit, omnino latere videntur. Mihi saltem non obtigit, ut obscuritatem, qua vita talis viri immerito tegitur, aliquo modo dispellerem. Annus etiam mortis ignoratur, neque aliud quidquam constat, quam quod codices ipsi exhibent. Et hi quidem inter se ratione habita ad libri inscriptionem et auctoris nomen, ita discrepant, ut conjectura modo, quid verum sit, adsequi possimus. Ut a Codice Upsaliensi incipiam, sic ille inscribitur: كتاب الانيس المضروب (in margine: صوابه المطرب)، بروض القرطاس، فى اخبار ملوك المغرب، وتاريخ مدينة فاس، تاليف الشيخ الجليل المحدث ابو محمد صالح ابن عبد الحليم i. e. *Liber amici familiaris, in hortis chartæ exhilarantis* (secundum lectionem marginis, quæ sola vera est); *de rebus gestis regum Mcghrebi et historia urbis Fâs; auctore illustri Doctore, traditionum peritissimo, Abu Muhhamed Salihh Ibn A'bd el Hhalîm.* Quod ad primam inscriptio-

nes partem seu titulum adtinet, cum rectissimum in hoc codice expressum credo, ad quem omnes, quos vidi aut in Catalogis descriptos inveni, Nostri codices, levissima plerumque mutatione sese conformant. In nomine autem auctoris major est diffirentia. Codex Escurialensis (vid. *Casiri*, Bibliotheca Arab. Hisp. T. p. 159) cum Upsaliensi conspirat, auctorem esse Granatensem solummodo addens. Quem sequitur in versione Portugalensi Antonius Moura et Petis de la Croix in versione gallica. Ceteri omnes, sicut Leidensis N:o XVII, Havniensis XXXV et XXXVI (olim Hoestii), Bodleianus CCCIII cet. quibus addatur Dombay in versione germanica, eum adpellant *Abu-l-Hhassan Ali ben A'bd allah ben Abi Zera' Fasensis* (ابو لحسن على بن عبد الله بن ابى زرع الفاسى) nomine plus minusve in compendium redacto. Si genium libri consulueris, satis superque tibi elucebit, neminem, nisi Fàs inhabitaverit, tot ac tantas in hujus urbis descriptione minutias adferre potuisse, ac eas, quæ in hoc opere inveniuntur. In iis præcipue enarrandis, quæ ad fata Fàsi adtineant, mirifice delectari videtur. Constat quoque, eum, regnante familia Merinidarum, quæ Fàs caput regni elegerat, heic vixisse, id quod e multis libri locis demonstratur. Testimoniis, quæ præbet magna Codicum copia, accedit novum ex *Hadji Khalfa* (vid. Observv. not. IV) et, qui eum

sequitur, *Herbelotio* (s. v. *Zora*, *Carthas*, *Fas* et *Tarikh Fas*). Quas ob caussas non dubito contendere, nomen Nostri verum id fuisse, quod hi autumant; quamvis ambæ sententiæ ita quodammodo concilientur, ut Granada urbs natalis ei fuerit, unde posterius in Africam transmigravit. — De tempore, quo vixerit, id certe scimus, eum imperante Abu Said O'thmàn ben Abu Jusuf Ja'kub ben A'bd el Hhakk, nono Merinidarum rege (intra annos DCCX et DCCXXXI; p. Chr. n. MCCCX — MCCCXXX) librum suum composuisse, ubi ultimus, qui memoratur annus est DCCXXVI (p. Chr. n. MCCCXX$\frac{V}{VI}$).

Argumentum libri hoc fere est. Post preces solennes caussam hujus scriptionis breviter exponit auctor et deinde ad materiem propositam, historiam scilicet urbis Fâs, statim transit, eamque in quinque dividit sectiones, secundum varias, quæ urbem illam occupaverant, dynastias. I. (In Codice Upsal. a fol. II:da r. ad XXVIII v.) *Historia regum Meghrebi e familia* Edrisi Hhassanitæ, *ubi narratur de regno eorum, deque urbe Fâs, imperii sede regnique domicilio, ab iis condita* (الخبر عن ملوك المغرب من الادراسة الحسنيين وذكر قيامهم فيه وبنايهم مدينة فاس دار ملكهم وقرار سلطانهم). Historia ab anno Fugæ

CXLV (p. Chr. n. DCCLX$\frac{II}{III}$) incipit. — II. (Fol. XXVIII —XXXIII v.). *Historia regni* ZENATÆ *e tribubus Moghrava et Beni Jefrun in Meghreb, imperiique ibi constitutione* (الخبر عن دولة زناتة المغراويين واليفرنيين بالمغرب وقيام ملكهم به). Zeiridarum regnum e Zenata oriundum heic intelligit auctor. — III. (Fol. XXXIII—XLVIII v.) *Historia initii dynastiæ* MURABITORUM *e tribu Lemtuna profectæ, ejusque in meridionalibus regionibus, Meghrebo et Hispania dominationis; memorantur etiam reges eorum et quantum temporis duraverit eorum ætas, usque ad imperium exstinctum* (الخبر عن ظهور الدولة المرابطة اللمتونية وقيامها بالقبلة والمغرب وبلاد الاندلس وذكر ملوكهم ومدة ايامهم الى انقضايها وذهابها). — IV. (a Fol. XLVIII—LXXIX r.). *Historia dynastiæ* MUVAHHIDIN, *successorum A'bd el Mumeni et quomodo regnum ejus per Muhhamedem ben Tumert* [5]), *Mehdi adpellatum, sit constitutum* (الخبر عن دولة الموحدية المومنية وقيامها على يد محمد بن يومر المسمى المهدى). — V. (a fol. LXXIX ad finem usque libri) *Historia dynastiæ fortunatæ* MERINIDARUM, *A'bd el Hhakki successorum, (quam diuturnam et æternam reddat Deus, auctoritatem ejus evehat, eamque viribus sustentet); deque genealogia ejus sincera, conservatione justitiæ et veræ fidei, regibus ejus, ex-*

*pugnationibus et bellis sacris, vita illustri, merits et monumentis.* (الخبر عن دولة السعيدة المرينيّة العبد الحقيّة اطالها الله وخلّدها واعلى كلمتها وابدها وذكر نسبها الصريح وقيامها بالحق والاعتقاد الصحيح واخبار ملوكهم وفتوحاتهم وغزواتهم وسيرهم الجميلة ومآثرهم وايثارهم). Ad finem singulorum capitum additur brevis omnium, quæ tempore dynastiæ descriptæ acciderant, rerum memorabilium recensio, ad annorum seriem disposita. Ceterum chronici more res ubique enarrantur et cujusque dynastiæ origines repetuntur.

Indicium præstantiæ libri et utilitatis, nisi ex ipsa argumenti expositione elucescat, inde quoque petere possumus, quod tribus seculis postremis obtinuit versiones, in singula unam. *Petis de la Croix*, ut narrat Ol. Celsius (vid. Catalogum Centuriæ librorr. rarr. cet. Ups. MDCCVI p. 14) rogatu Sparwenfeldtii, opus præstantissimum hocce in linguam vertit gallicam. Regia Bibliotheca Parisiensis autographum hujus versionis, una cum codice infra describendo, quo usus est interpres, jam possidet, cujus exemplar nitide exscriptum, quatuor voluminibus in quarto constans, in donatione Sparwenfeldtiana N:o XI signatum servat Bibliotheca Academiæ Upsaliensis sic inscriptum: *Livre*

*du Familier attaché aux parterres d'Al-Cartas, touchant les histoires de Rois de Mauritanie et les annales de la ville de Fez, composé par l'excellent Cheik* Abu Mehemet Saleh fils d'Abdel hhalim. In nostro apographo multa insunt spatia vacua relicta, ubi forsan Petis de la Croix de sensu verborum dubius hæserit. Qui ceterarum hujus viri versionum indolem cognoverit, eandem heic quoque inveniet. Speciem potius paraphraseos, ad sensum magis quam verba adcommodatæ, quam fidæ interpretationis præ se ferunt, cel. Professore genio suæ ætatis sine dubio indulgente. — Annis MDCCXCIV—XCVII Agrami prodiit, duobus voluminibus in octavo comprehensa versio Germanica hoc titulo insignis: *Geschichte der Mauritanischen Koenige. Verfasst von dem Arabischen Geschichtschreiber Ebül-Hassan Aly Ben Abdallah Ben Ebi Zeraa, aus der Stadt Fess gebürtig. — Uebersetzt — von Franz von Dombay.* Non sine laudatione adjecta eam dijudicavit *Silvestre de Sacy* in Ephemeridibus *Magazin Encyclopédique* adpellatis (vid. ad tertium annum Tom. V, et ad annum quartum Tomm. II. et V.). At etsi præcedentem multo superet, merito culpandus eo mihi videtur, quod plura supervacanea et in versione omittenda duxit Dombay, quæ tamen admodum observatione digna et summi sunt pretii. Forsitan, difficultatem vertendi persentiens, obscuriora reliquit loca si-

cut carmina heic illic interserta et inprimis Moskei Fasani descriptionem, quam, si quis alius, ille, sex annos in his regionibus commoratus, explicare potuisset. Errores haud pauci obvenientes codici vitioso sine dubio sunt adnumerandi, ut et nominum nonnumquam falsa scriptio et in annis hallucinatio. — His demum temporibus, ut Historiæ Portugalliæ lucem adferret, versio portugallica textui arabico magis congrua accurate est composita. Præfert hanc significationem: *Historia dos Soberanos Mahometanos das primeiras quatro Dynastias, et de parte da quinta, Que reinarão na Mauritania, escripta em arabe por Abu Mohammed Assaleh, filho de Abdelhalim, natural de Granada, e traduzida, e annotada por Fr. Jozé de Santo Antonio Moura, Ex Geral de Congregação da Terceira ordem da penitencia — — Lisboa MDCCCXXVIII.* Qu. Ut in præfatione interpres indicavit, quatuor codices eosque optimos ante oculos habuit in versione elaboranda, quæ duabus supradictis et fidelitate et integritate antecellit. Quæ e versione ejecit loca, maximam partem sunt carmina ambitus longioris, minoris vero momenti. Diversitatem si quam ab iis codicibus, quos inspexi, quibusdam locis notavi, eam a librorum, qui litteris, quas vocant, africanis sunt exarati, natura explicare licet; quum ii et ob ipsum

scripturæ genus et propter majorem librariorum negligentiam lectu sint difficillimi.

Post tot ac tantos labores nemo adhuc operæ pretium censuit librum Nostri arabice edere. Studio litterarum orientalium indies crescente, ætas nostra postulat, ne ulterius in verba juret interpretis, ut auctorem lingua sua loquentem cognoscat et consulat. Perlecto codice Upsaliensi, statim me cepit cupido, fortuna adjuvante mitiore, eum olim publici juris faciendi. In itinere ad exteros mox deinde suscepto in id studui, ut quamplurimos libros Nostri manuscriptos Upsaliensi conferrem. Suppellectile lectionum varietatis haud exigua collecta, redux mecum constitui fragmentum, specimen editionis futuræ, publicare, et initium tertiæ libri sectionis, in codice Upsaliensi quinque folia complectens, fini conveniens elegi. At obstabat defectus typorum arabicorum. Diu hæsitabundo mihi opem tulit Mæcenas illustrissimus, Liber Baro *Constantinus d'Ohsson*, a S. Regia Majestate ad Aulam Prussicam Legatus, cujus in me beneficia rite celebrare non valeo. Copia ab Academia Scientiarum Berolinensi benigne facta, typos apud Deckerum fundere curavit et Upsaliam misit. Sit igitur sequens fragmentum, quod in acta sua inserere haud recusavit Regia Societas Scientiarum Upsaliensis, no-

vorum etiam typorum specimen. Ut vero judicent lectores, quæ mea fuerit cura in textu recognoscendo, necessarium duxi præmittendam brevem manuscriptorum, quæ ad manum habui, recensionem.

Codex *Upsaliensis* (U.), in legato Sparwenfeldtii X^us^, formæ in folio, chartæ crassæ, litteris africanis, ut ceteri quos vidi, calamo grosso sed satis eleganti exaratus est. Folia numerat CXVIII, iis exceptis, quæ in initio et fine libri traditionibus insulsis plena reperiuntur. In duas partes est divisus, quarum secunda folio LIX^uo^ incipit. Rubricæ et initia novæ materiei minio sunt distincta. Inscriptio jam supra adlata est, in subscriptione recurrens, voce بروض in روض tantum mutata. Opus absolvit librarius anno DCCCCLXXXVIII (p. Chr. n. MDLXX$\frac{\text{VII}}{\text{VIII}}$) in urbe *Tembekt* (تمبكت مدينة فى — forsan Timbuktu). Codex in genere optimæ notæ est habendus. — Bibliotheca *Leidensis* (L.) exemplar possidet Numero XVII signatum, formæ in quarto, foliorum CLXIX manu elegante quamquam non sibi constante, lectu tamen facili, anno DCCCCLXXXIX (p. Chr. n. MDLXX$\frac{\text{VIII}}{\text{IX}}$) descriptum. Lacunæ quædam insunt minores, ubi librarius archetypum, ut videtur, legere non potuit, ex quo etiam explicari possunt distortæ quædam

lectiones. Calamus recentior, voce كذا (i. e. sic!) vocabulis superscripta, vitia notavit manifesta et in margine loca majoris circuitus indicavit prætermissa. Alius etiam recentior paucis modo locis conjecturam suam substituit. In duobus primis codicis foliis doctus quidam (cl. Weyers se manum Scheidii agnoscere putabat) lectionum varietatem, deinde abruptam, adscripsit; ejusdem autem manus observationes in duobus ultimis foliis iterum leguntur. Ut in Upsaliensi, sic in hoc litteræ quædam se inter ita commutantur ut ت pro ث, د pro ذ cet. scribatur. Quæ variatio, ut plures aliæ manuscriptorum orientalium differentiæ, ita optime explicari videtur, si librarium ad vocem anagnostæ librum exaravisse tibi finxeris. Inscriptio aliâ manu, quam quæ cetera scripsit, posterius adjecta, hæc est:

كتاب الانيس المطرب روض القرطاس فى اخبار ملوك المغرب وتاريخ الفاس، يعنى خمسة دول، دولة السادة الادارسة الحسنيين، ودولة زناتة، ودولة لمتونة، ودولة الموحدين، ودولة بنى مرين، تاليف الفقيد المورخ ابى الحسن عالى بن ابى زرع i. e. *Liber amici familiaris, hortos chartæ exhilarantis; de rebus gestis regum Meghrebi et historia Fási; quinque scilicet dynastias comprehendens: Edrisitas Hassanitas e familia Prophetæ oriun-*

*dos, Zenatam, Lemtunam, Muvahhedin et Beni Merin. Quem scripsit jurisconsultus et historiographus Abu-l-Hhassan A'li ben Abi Zera'.* — Codex *Parisinus* (P.) jam laudatus, anno DCCCCLXXI (p. Chr. n. MDLX$\frac{\text{III}}{\text{IV}}$) non satis pulchre scriptus, initio mutilus est. Quare ex alio codice (forsan Sparwenfeldtii) proœmium separatim exscripsit Petis de la Croix et codici suo deinde adjunxit. In fronte libri sic inscribitur: كتاب القرطاس فى اخبار ملوك المغرب وتاريخ مدينة فاس; at in fine idem occurrit titulus, quem in subscriptione Upsaliensis legimus. Magno usui mihi fuit hoc Manuscriptum, cujus indoles omnino bona est.— Aliud exemplar (Ch.) mihi Parisiis degenti liberalitas suppeditavit clarissimi *Champollion Figeac*, e bibliotheca quondam fratris desumtum. Volumen non magnum, præter Nostrum quatuor complectens alios tractatus, ad historiam Edrisitarum spectantes, atramento pæne deleto anno MCLXI (p. Chr. n. MDCCXL$\frac{\text{VII}}{\text{VIII}}$) exaratum est. Præfamine caret ac statim ab Historia Edrisi initium facit. In subscriptione titulus legitur, qui codici Leidensi plane convenit. In primo folio Legrand anno MDCCLXXV adscripsit manuscripti, quod quondam Chenier consuli Gallico apud Maroccanos fuit, notitiam, ubi libri inscriptio sic vertitur: *Livre de l'ami joyeux, jardin des feuilles de l'arbre genéalogi-*

*que des princes idrisiens et autres, qui ont regné en Afrique.* — Bibliotheca *Bodleiana* quatuor habet Nostri exemplaria, quorum *primum* (Bc), codicem Bodlei. CCCIII, in Catalogo Nicolliano pagina CXVI sub Numero CXXVI optime descriptum invenies. — *Secundum* (Bb), inter codices Marsh. DLXXXII, in Catalogo Urii numero DCCCIX notatum, in Quarto, anno MLX (p. Chr. n. MDCL) scriptum in CCCXCI paginis Kartâs integrum, si præfationem excepperis, continet. Inscribitur: هذا كتاب الانيس المضروب على روض القرطاس الخ. — *Tertium* (Ba), Marsh. CCCVI, apud Urium DCCLXII, chartæ admodum crassæ, folia numerans LXVI, anno DCCLXXV (p. Chr. n. MCCCLXX$^{III}_{IV}$) est descriptum; cujus antiquitatis indicia ubique servat. Inscriptio hæc est: نبذ من الانيس المطرب روض القرطاس الخ على الايجان والاختصار i. e. *Succus e libro amici familiaris, hortos chartæ exhilarantis* cet. *expressus, compressionis (?) et brevitatis caussa.* Quæ verba hæc continua excipiunt: نبذ من اخبار الادارسة الحسنيين وبنايهم مدينة فاس i. e. *Succus ex historia Edrisitarum Hhassanitarum et quomodo urbem Fás condiderint.* — *Quartum* denique (Bd) fine mutilatum, Marsh. XLVII, apud Urium DCCCXXX, recentioris ætatis, hanc fert inscriptionem:

تلخيص الانيس المطرب، فى اخبار ملوك المغرب i. e. *Compendium libri* cet. Hi duo postremi codices, ut jam e titulis adparet, nihil aliud quam epitomen Nostri continent. Unum eorum magnæ esse antiquitatis vidimus. Quare ejusmodi compendium non multo post ipsum librum compositum, ab ipso forsan auctore confectum, fuisse vero simillimum est. Adfirmanti Dombay (vid. præf. versionis cit. pag. XX) creditum est, apud Maroccanos inveniri librum quendam, qui, pluribus voluminibus spissus, *Kartâs major* (القرطاس الكبير) adpellatur, a quo Noster nomini *Kartâs minor* (القرطاس الصغير) distinguitur. At si ad illa compendia in Bibliotheca Bodleiana exstantia animum adtenderis, facile conjicies, in iis latere verum illum Kartâs minorem; majorem autem eum esse, de quo heic quæritur. Donec alicui contigerit, ut alium Nostro majorem inveniat, sive apud auctorem quemquam legat Nostrum nomine Kartâs minoris laudatum, conjectura illa adfirmationi Dombayanæ præferenda mihi videtur. Certe apud Ibn Khaldûn (fol. LXXXI) ubi Noster citatur *Ibn Abi Zera'*, liber vocatur كتاب الانيس. Neque in variis codicibus talis distinctionis indicium obvenit. In Upsaliensi tantum manu admodum recente folio ex iis quæ operi ipsi sunt præfixa legitur:

تاريخ القرطاس. E quibus omnibus concludere fas est, illud tituli compendium non esse antiquum.

---

Antequam fragmentum judicio submittam eruditorum, non a materia tractanda multum abesse duxerim si notitias de populo Berberorum, ut comparationis instituendæ occasionem faciam, ex alio auctore arabico adjecero desumtas, qui et nominis celebritate rerumque narratarum apta dispositione et manifesta veritate dignus videtur, qui præ ceteris sit audiendus. *Ibn Khaldûnum* loquor, cujus in Historiam Prolegomena, a litterarum orientalium cultoribus diu magna admiratione accepta, flagrantissimum commoverunt desiderium ipsius Historiæ cognoscendæ. Hoc ultimo lustro tandem post varios conatus obtigit, ut secundum tria manuscripta [7]) doctis liceret judicare, cujus pretii sit Historicus Ibn Khaldûn. Historiam scripsit universalem in octo Sectiones (اجزاء), tres Libros (كتب) conficientes, divisam, ita dispositam, ut secundum cognationem populorum diversorum, imaginem ethnographice ut ajunt delineatam totius sibi noti sisteret mundi. Tertium operis librum Historiæ Berberorum totum dicavit. Quo confusior apud multos Arabum scriptores hæc res est tra-

ctata [8]), eo gratior nobis esse debet narratio, quæ subtili rerum judicio et sollertia judicandi rara subfulta, lucem materiæ obscuræ reddere potest. Quæ e codice Musei Britannici excerpsi, ratione fragmenti publicandi semper habita, in compendium redacta heic adjiciam, præmissa codicis brevi notitia.

Museum Britannicum inter Manuscripta exemplar Numero 9575 insignitum servat partis Ibn Khaldûni, quod olim Bibliothecæ *Richii* apud Baghdadenses consulis Britannici fuit. Formæ est folii minoris, et CCIV folia continet; litteris Neskhi dictis anno MXCIV (p. Chr. n. MDCLXXX$\frac{II}{III}$) bene exaratum, sic inscribitur: الجزو السادس والسابع من كتاب العبر، وديوان المبتدا والخبر، في ايام العرب والعجم والبربر، للشيخ العلامة عبد الرحمان بن محمد بن خلدون الحضرمي i. e. *Pars sexta et septima Libri exemplorum et collectionis subjecti et prædicati, de diebus Arabum, Persarum et Berberorum memorabilibus; auctore doctissimo Doctore A'bd el rahhmán ben Muhhamed ben Khaldún Hhadhremi* [9]). Quadraginta prima folia, quæ partem operis sextam complectuntur, varias tribus Arabum, quæ, Irakam, Syriam, Saîd, Nubiam, Habesch, Barkam, Afrikam et Meghreb habitantes, puro sermone

arabico non utuntur (العرب المستعجم), ordine ethnographico descriptas exhibent. Folio deinde XL^mo verso incipit Liber tertius totius operis hac inscriptione insignis: الكتاب الثالث فى اخبار البربر الامة الثانية اهل المغرب وذكر اوّليّتهم واجيالهم ودولهم منذ مبدا الخليفة ولهذا العهد ونقل الخلاف الواقع بين الناس فى انسابهم i. e. *Liber tertius de Historia Berberorum, qui secundam gentem Meghreb habitantem constituunt; ubi origines eorum, ætates et regna inde a primis Khalifati temporibus ad hoc usque seculum enarrantur. Exponuntur etiam diversæ hominum opiniones de genealogüs eorum.* De origine denominationis Berber, a qua orditur Ibn Khaldûn, nihil aliud heic adfert, quam derivationem illam a voce arabica بربر, cujus significatio est: *clamavit, vocitavit iratus* [1]); ea vero consuetudinem valde sapit Arabum e sua lingua vocabula quoque extranea explicandi. In duas magnas familias ab initio divisi sunt Berberi, ab eodem *Berber* (بربر) originem ducentes, a quibus innumeræ fere tribus, super totam Meghrebi terram dispersæ, exierunt. Altera est *Bernes* (برنس), quæ septem ramos seu tribus principales (اجذام) numerat, unde quasi ramuli aliæ deinceps sese diffuderunt. Hæ sunt: *Ardhâdja*

(ارذاجة), *Mesmûda* vel *Mesmâda* (مصمودة alias مصمادة), *Eureba* (اوربة), *A'djîsa* (عجيسة), *Ketâma* (كتامة), *Sanhâdja* (صنهاجة), *Eusîgha* (اوزيغة); quibus alii addunt *Lemtam* (لمطة), *Hescûram* (هسكورة) et *Guzulam* (جزولة). Altera est *Mâdghisch* cognomine *Elebter* (مادغيش الابتر pl. بُتُر), quæ quatuor tribus principales ad se referendas habet: *Adâsam* (اداسة), *Nefûsam* (نفوسة), *Dharîsam* (ضريسة) et *Lava nata majorem* (بنو لوى الاكبر) a Lava minore, ejus filio, bene distinguendam. Ad utramque posuit Ibn Khaldûn tabulas genealogicas, quas, ut postea brevior essem in variis tribubus recensendis, ita adjunxi, ut eas, quantum fieri licuit e sequentibus Ibn Khaldûni effatis corrigerem et nomina, quibus apud auctorem carerent, eodem modo adderem, hujus illiusve tribûs domicilio notato.

His præmissis transit (folio XLII) Ibn Khaldûn ad origines Berberorum indagandas. "Diversæ semper fuerunt", ait, "de incunabulis hujus populi Arabicorum scriptorum sententiæ. *Mes'ûdi* Abrahami posteros fuisse autumat, qui e Palæstina per regem Persidis quendam ejecti, postquam in Ægypto sedes frustra quæsiverant, Nilo trajecto, in Meghreb sese dissiparunt. — Alii vero crediderunt, No'man

ben Hhimjar, Sabæ regem, filios suos, terram exculturos, in Meghreb misisse; e quorum progenie ibi Berberi essent orti. — Sunt etiam, qui contendant, *Djalût* (جالوت Goliat Hebræorum) eorum fuisse parentem; at jam pridem eam sententiam A'li ben A'bd el a'zîz Djurdjanensis improbavit et satis superque refutavit. — *Taberistanensis*, cui alii adsentiunt, dicit, Berberos Cananæis et Amalekitis inter se mixtis ortum debere. — Afrikus rex, e plurium sententia, ex oris Syriæ maritimis eos ad Afrikam expugnandam secum duxit. — Haud pauci historiographi arbitrantur, Israëlitas, mortuo Goliat, vel secundum alios, jam tempore Josuæ ejusque ductu, Berberos e Palæstina expulisse, qui, Ægypto peragrata, in Barka, Afrika et Meghreb Oceanum tenus considerint. Ubique heic bellis continuis contra Francos (الافرنج) pugnavisse eosque ad Siciliam, Sardiniam, Majorcam et Hispaniam propulisse; pacem tandem his conditionibus fecisse, ut Franci urbes tenerent, ipsi autem Berberi campos patentes possiderent. Sed Islamismo exorto novum rerum ordinem natum fuisse. Berberos, qui hoc tempore varias profitebantur religiones, Judaicam, Christianam vel Magicam (Idololatriam), Muslimicos jam adgressos esse; inde bella diuturna mota. — *El Bekri* eos Chami posteros facit. Cham enim, facie per imprecationem

patris in atram mutata, in Afrikam aufugit; filius ejus Berber nomen suum posteris dedit. — Qui arabicam eorum originem propugnant, ad Ghailan ben Mudhar genus referunt." — Ita expositis, quæ de hac re diversi habent auctores, opiniones has discrimini subjicit acerrimo, cujus summa hæc est. Eam sententiam solam veram censet Ibn Khaldûn, quæ Berberorum genealogiam a Canaano, filio Noachi, deducit. Dubitationi tamen locus patet, postea addit, utrum plures eorum tribus, ut *Sanhâdja*, *Ketâma*, *Levâta* et *Hevvâra*, arabici an berberici sint generis [2]).

In capite secundo (folio XLIV) terram Berberorum delineat Ibn Khaldûn, finesque domiciliorum determinat. Locum quamquam longiorem totum exponere haud abs re duxi, siquidem maximi sit momenti terram bene cognoscere, quam habitaverit populus, de cujus historia heic quæritur.

واما حده من جهة القبلة والجنوب فالرمال المهولة المثالة حاجزا بين بلاد السودان وبلاد البربر يعرف عند العرب الرحالة البادية بالعرق وهذا العرق سياج على المغرب من جهة الجنوب مبتدى من البحر المحيط وذاهب فى جهة الشرق على سمت واحد الى ان يعترضه النيل الهابط من الجنوب الى مصر فهنالك ينقطع وعرضه ثلاث مراحل | وازيد ويعترضه فى قبلة المغرب الاوسط ارض محجرة تسمى عند العرب الجمادة من دوين مصاب

الى بلاد زبغ ووراه فى جهة الجنوب بعض بلاد الجريديّة ذات نخل وانهار معدودة فى جملة بلاد المغرب مثل بلاد نودة (؟) ولمنطيت (؟) فى قبلة المغرب الاقصى وتسابليَتْ وتيكورارين فى قبلة المغرب الاوسط وغدامس وقران وودّان فى قبلة طرابلس كل واحد من هذه الاقليم يشتمل على بلدان غامرة ذات قرى ونخل وانهار ينتهى عدد كل واحد منها الى المأئة فاكثر، والى هذه العدوة الجنوبيّة من هذا العرق ينتهى فى بعض السنين مجالات اهل اللثام من صنهاجة ومنقلبهم الحايلون هنالك الى بلاد السودان وفى العدوة الشماليّة منه مجالات البادية من الاعراب الطواعن بالمغرب وكانت قبلهم مجالات للبربر كما نذكره بعد، هذا حدّ المغرب من جهة الجنوب ومن دون هذا العرق سياج اخر على المغرب مما يلى التلول منه وهو الجبال التى هى نحوم لتلك التلول ممتدة من لدن البحر المحيط فى الغرب الى برتيف (برنيف leg.) من بلاد برقة وهنالك تنقطع هذه الجبال المحيطة ويسمى مبدوها من الغرب جبال درن، وما بين هذه الجبال المحيطة بالتلول وبين العرق الذى وصفناه انفا فبسائط وقفار اكثر نباتها الشجر وفيما يلى التلول منها ويقاربها بلاد الجريد ذات نخل وانهار، ففى ارض السوس قبلة مرّاكش تارودانت وايغرى فونان وغيرهما بلاد ذات نخل وانهار ومزارع متعدّدة عامرة، وفى قبلة فاس سجلماسة وقراها لمدن معروفة ودرعة ايضا وهى معروفة وفى قبلة تلمسان بلد فيكيك قصور متعددة ذات نخل وانهار، وفى قبلة تاهرت القصور ايضا بلاد متتالية على سطر من الشرق الى الغرب اقرب ما اليها جبل راشد وهى ذات نخل ومزارع وانهار ثم بلد واركلى قبلة بجاية بلد واحد مستبحر العمران كثير النخل وفى سمته الى جهة التلول بلاد زيغ تناهز الثلاثمائة منتظمة على حفافى واد ينحدر من الغرب الى الشرق ذات نخل وانهار واقرب منها الى التلول بلاد الزاب منتظمة من الغرب الى الشرق تناهز مائة من البلاد فاكثر قاعدتها بسكرة من كبار الامصار بالمغرب وتشتمل كلها على النخل والمدن والقرى والمزارع ثم بلاد الجريد قبلة تونس وهى

نقطة وتوزر وقفصة وبلاد نفزاوة وتسمى كلها بلد قسطيلية مستجرة العمران مستحكمة الحضارة مشتملة على النخل والانهار ثم قابس قبلة سوسة وهي حاضرة البحر من اعظم امصار افريقيّة وكانت دار ملك لابن غانية كما نذكره بعدُ، وتشتمل على النخل والانهار والمزارع، ثم فزاز وودّان قبلة طرابلس قصور متعددة ذات نخل وانهار هي اول ما افتتح المسلمون من ارض افريقيّه لما اغزاها عمر بن الخطاب (و)عمرو بن العاص، ثم الوحات قبلة برقة ذكرها المسعودى فى كتابه، وما وراء هذه كلها فى جهة الجنوب فقفار ورمال لا تنبت زرعا ولا مرعى الى ان تنتهى الى العرق الذى ذكرناه، ومن ورايه مجالات الملثمين كما قلناه مفاوز مُعطشة الى بلاد السودان وما بين بلاد النخل هذه والجبال التي هي سياج التلول بسائط متلوّن مزاجها تارة بمزاج التلول وتارة بمزاج الصحرا فى هوايها ومياهها ومنابتها وفيها القيروان وجبل اوراس معترض وسطها وبلاد الحضنة حيث كانت طينه ما بين الزاب والتل وفيها مقرة والمسيلة وفيها السَرْسَوا قبلة تلمسان حيث تاهرت وفيها جبل ديرو قبلة فاس معترضة فى تلك البسائط و هذا حدّ المغرب من جهة الجنوب والقبلة، واما حده من جهة الشرق فيختلف باختلاف الاصطلاحات، فعُرف اهل الجغرافيا انه بحر القلزم المتفجّر من بحر اليمن هابطا على سمت الشمال وبانحراف يسير الى جهة المغرب حتى ينتهى الى القلزم والسويس وبعده عن مصر فى جهة الشرق ثلاثة ايام هذا اخر المغرب عندهم ويدخل فيه اقليم مصر وبرقة وكان المغرب عندهم جزيرة احاطت بها البحار من ثلاث جهاتها كما تراه، واما العرف الجارى لهذا العهد بين سُكّان هذه الاقاليم فلا يدخل فيه اقليم مصر ولا برقة وانما يختصّ بطرابلس وما وراها الى جهة المغرب مثل افريقيّة والزاب والمغرب الاوسط والمغرب الاقصى والسوس الادنى والاقصى هذا هو المغرب فى العرف لهذا العهد وهو الذى كان فى القديم ديار البربر ومواطنهم، واما المغرب الاقصى منه وهو ما بين وادى ملويّة من جهة الشرق الى اسفى حاضرة البحر المحيط وجبال

درن من جهة الغرب فهو فى الاغلب ديار المصامدة من اهل درن وبرغواطه (برغواطة .l) وغمارة (غمارة .l) واخر غمارة (غمارة .l) بطوية ما يلى غساسة، ومعهم عوالم من صنهاجة ومطغرة واورية (اورية .l) وغيرهم ويحيط به البحر الكبير من غربية والرومى من شمالية والجبال المتصاعدة المتكاثفة مثل درن من جهة القبلة وجبال تازى من جهة الشرق لانّ الجبال اكثر ما هى واكثف قرب البحار لما اقتضاه التكوين من ممانعة البحار بها فكانت جبال المغرب كذلك اكثر وكثر ساكنها من المصامدة فى الاغلب وقليل من صنهاجة وبقيت البسايط من المغرب مثل ارغار وتامّسْنا وتادلا ودكالة اعتمرها الطواعن من البربر والعرب الطارين عليه من جشم ورياح فعض المغرب ساكنة من امم لا يُحصيهم الا خالقهم وصار كانه جزيرة او بلد واحد احاطت به الجبال والبحار وقاعدته لهذا العهد فاس وهى دار ملكه ويمر فيه النهر العظيم المعروف بوادى امّ ربيع وهو نهر عظيم يمتنع عُبُورُه ايامَ الامطار لانساعة وبعظم مدّه من البحر فينتهى الى سبعين ميلا او ما يقاربها ومصبّه فى البحر الكبير عند ازمور ومنبعه من جبال درن من فوهة كبيرة ينبَعُ منها هذا النهر وينساهل الى بسيط المغرب وينبع منها ايضا نهر اخر وينحدر الى القبلة ويمرّ ببلاد درعة ذات النخل المخصوصة بنبات النيلج وصناعة استخراجة من شجرة وهى قصور ذات نخل موضوعة فى سفح جبل درن من اخره وبها يسمى هذا النهر ويجاوزها الى ان يغوص فى الرمل قبلة بلاد السوس، واما نهر ملويّة اخر المغرب الاقصى فهو نهر عظيم منبعه من فوهة فى جبال قبلة تازى ويصبّ فى البحر الرومى عند غساسة وعليه كانت ديار مكناسة المعروفة بهم فى القديم ويسكنها لهذا العهد امم اخرى فى (من .l) زناتة فى قصور منتظمة الى اعلا النهر يعرفون بوطاط ويجاوزهم هنالك، وفى سايز نواحيه امم من البربر اشهر من فيهم بطالسة اخوة مكناسة، وينبع مع هذا النهر من فوهته نهر كبير ينحدر ذاهبا فى القبلة مُشرقا بعض الشى ويقطع العرق على سمته الى

ان ينتهى الى نوده ثم بعدها الى لمنطيت ويسمّى لهذا العهد كبير وعليه قصورها ثم يمرّ الى ان يصبّ فى القفار ويغوص فى رمالها وعلى موضع مغاصه قصور ذات نخل تسمى ركان وفى شرق نودة مما ورآ العرق قصور تسانيت من قصور الصحرا وفى شرقى تسانيت الى ما يلى الجوف تيكورارين تنتهى الى ثلاثمائة او اكثر فى واد واحد منحدر من المغرب الى المشرق وفيها امم من قبايل زناتة، واما المغرب فهو فى الاغلب ديار زناتة كان لمغراوة وبنى نفرن (يفرن .l) وكان معهم مديونة ومغيلة وكومية ومطغرة ومطماطة ثم صار من بعدهم لبنى ومانوا وبنوا (وبنى .l) بلوهو ثم صار لبنى عبد الواد وتوجين من بنى بادين وقاعدته لهذا العهد تلمسان وهى دار ملكه وبجاوزه من جهة الشرق بلاد صنهاجة من الجزاير والمتيجة والمدية وما يليها الى بجاية وقبايله كلهم لهذا العهد مقلبون للغرب من زغبة، ويمر فيه وادى شلف بنى واطيل النهر الاعظم منبعة من جبل راشد فى بلاد الصحرا ويدخل الى التل من بلاد حصين لهذا العهد ثم يمر مغربا ويجتمع فيه ساير اودية المغرب الاوسط مثل منبا وغيره الى ان يصب فى البحر الرومى ما بين كلمنيتو ومستغانيم وينبع من فوهته نهر اخر يذهب مشرقا من جبل راشد ويمر بالزاب الى ان يصب فى سبخة ما بين توزر ونفراوة معروفه هنالك ويسمى هذا النهر وادى شدى، واما بلاد بجاية وقسنطينة فهى ديار زوارة وكتامة وعجيسة وهوارة وهى اليوم ديار للعرب الا ممتنع الجبال وفيها بقاياهم، واما افريقية كلها الى طرابلس فبسايط فيح كانت ديار البعزاوة وبنى نفرن (يفرن .l) ونفوسة وهوّارة ومن لا يحصر من قبايل البربر وكانت قاعدتها القيروان وهى لهذا العهد مجالات للعرب من سُليم وبنى نفرن (يفرن .l) وهوارة مغلبون تحت ايديهم قد تبدّوا معهم ونسوا رطانة الاعاجم وتكلموا بلغة العرب ونحلوا بشعارهم فى جميع احوالهم وقاعدتها

لهذا العهد تونس وهى دار ملكها وبر فيها النبر الاعظم المعروف بوادى مجردة تجتمع فيه سايبر الاودية بها ويصب فى البحر الرومى على مرحلة من غربى تونس بموضع يعرف ببنزرت ، واما برقة فدرست معالمها وخربت امصارها وانقرض امرها وعادت مجالات للعرب بعد ان كانت ديار للوتة وهوّارة وغيرهم من البربر وكانت بها الامصار المستبحرة مثل البدة وزويلة وبرقة وقصر حسّان وامثالها فعادت بيابا ومفاوز كأن لم تكن ۞

"*Fines Berberorum meridiem versus sunt arenae horrendae et exitiales* [3]*), quae, regiones Nigritarum* (السودان) *a sedibus Berberorum separantes, apud Arabes nomadas et campestres nomine El-A'rk* (العرق i. e. *collis arenosus*) [4]) *insigniuntur. A meridie hic a'rk saepis modo Meghreb cingit, a mari inde Atlantico linea continua orientem versus ad Nilum usque procurrens, ubi fluvius ille a meridie veniens Aegyptum defluit; heic omnino evanescit. In latitudinem plus trium dierum itinere protenditur. Inter hunc A'rk et Meghreb Medium* (المغرب الاوسط) *jacet terra, quae apud Arabes nomen obtinuit Djamidae* [5]) (i. e. *terra dura*) *ob lapidosam suam naturam et a Duvein incipiens ad regiones Zigh pertinet. Pone eam meridiem versus plures regiones, quae, Djeridija (vel Belad el Djerid) adpellatae et palmarum fluminumque copia abundantes, per totam longitudinem omnem sequuntur Meghreb, sicut Belad Luda (?) et Lementit* [6]) *a*

*meridie Meghrebi el Aksa; Tesâblijet et Ticurarein a meridie Meghrebi el Avset; nec non Ghadâmis, Kerân et Veddân a meridie Tripolis. Quorum tractuum unusquisque plus centum regiones seu loca continet exculta, pagis, palmis fluviisque abundantia. Ad hanc terram ꝛc Ark meridionalem annis quibusdam pervenerunt agmina Populi Velaminis (Mulathimin,* vide infra*), e Sanhâdja oriundi, ibique sese convertentia in terras migrarunt Nigritarum; in septemtrionali autem ejus parte agmina Arabum campestrium, quæ in Meghreb vitam agunt nomadicam, jam habitant, ubi ante eos tribus vixerant Berberorum, ut postea narrabimus. Hi fere sunt fines Meghrebi meridiem versus. Sed sæpem etiam aliam quam illum A'rk Meghreb habet ex ea parte, ubi Telul adjacent; montes inquam, qui, a mari inde Atlantico in occidente ad Bernik (Berenicen) in regione Barkæ usque quo desinunt extensi, tractum Telul adadpellatum circumdant. Initium eorum ab occidente Montes Deren vocatur. Quod hos montes, Telul complectentes, et El-A'rk jam initio descriptum interjacet, e campis patentibus et sementi idoneis (?) consistit, quæ arbores præcipue gignunt, ejus vero regiones, quæ ad Telul pertinent, Belad el Djerid sunt palmis et fluviis abundantes. Sic in terra Sus, a meridie urbis Merrakesch, Tarudant e Eifri Funân sitæ sunt, aliæque terræ palmiferæ et aquo-*

*sæ ac arvis consitis plurimis abundantes. A meridie Fasi jacet Tidjilmâsa ejusque pagi notissimi, et Dera', quæ etiam nota est. Tilimsâni a meridie Beld Fikîc cum multis oasibus [5]) palmiferis et aquosis invenimus. A meridie Taherreti oases etiam sunt, regiones, quæ serie continua proxime Montem Râschid procedunt, palmis, arvis consitis et fluminibus abundant. Deinde sequitur Beld Varcli, Bidjajæ a meridie, regio continua terris excultis late patens et palmis dives. In ejus plaga Telul versus Belad Zigh jacent, trecentos comprehendentes pagos bene irrigatos et palmis abundantes, una serie ad ripas fluminis, ex occidente ad orientem defluentis, dispositos. Propius ad Telul sitæ sunt Belad el Zâb ab occidente ad orientem sese extendentes; quarum plus centum Zâb fluvius irrigat; omnes palmas, urbes, pagos et arva continent. Urbs princeps Biskera est eaque una maximarum Meghrebi urbium. Jam Tunesi a meridie Belad el Djerid habemus, e quarum numero sunt Nakta, Tuzer, Kafsa et Belad Nekzâva, quæ universæ uno nomine Kastilja continentur, et, locis excultis plenæ, domiciliis fixis bene instructæ, copia palmarum et aquæ gaudent. Post sequitur Kabes, a meridie Susæ sita, emporium et una Africæ urbium maxima, quondam sedes regia regni Ibn Ghanijæ, ut infra dicemus;*

*ea quoque palmas, fluvios et arva habet. A Tripoli meridiem versus Fezzân et Veddân occurrunt, oases numerosæ, palmiferæ et bene irrigatæ. Quæ terra prima fuit, quam in Afrika Muslimici occuparunt, ducibus Omaro ben el Khatâb et Amruo ben el A's. Excipiunt El Vahhât, a meridie Barkæ, quas in libro suo descripsit Mesu'di. Omnia quæ pone has regiones jam enumeratas jacent meridiem versus, deserta sunt et arenæ, in quibus neque semen crescit, nec pascua insunt, donec ad el A'rk illum jam laudatum veneris, pone quem diximus tribus Mulathimin desertum aqua carens usque ad Nigritarum regiones habitare. Inter has regiones palmiferas et montes, qui Telul circumdant, latissimi intercedunt campi, quorum natura, si ad aërem, aquam et plantas respexeris, ita variat, ut hèic Teluli heic Deserti speciem præ se ferat. Ibi sita sunt Keirevân, Mons Evrâs, qui per transversum mediam regionem occupat, Belad el Khasba (i. e. regiones herbarum copia lætæ), ubi soli natura eadem est ac inter Zab et Telul, Mekra, Elmisîla, et Serseva, Tilimsani a meridie, ubi nunc Taherret jacet. Ibi etiam a Fâs meridiem versus Mons Deirù jacet, qui per transversum hos secat campos. Hactenus de terminis Meghrebi meridiem versus. — Quod ad fines orientales adtinet, ii varie constituuntur. In-*

*ter Geographos convenit, eos efficere Mare Kulzum, qui sinus maris Jemenensis ad septemtrionem progreditur, exigua declinatione ad occidentem facta, donec Kulzum et Suis adtingat: a Misr (Cairo) trium dierum iter in plaga orientali distat. Aegyptum itaque et Barkam Meghrebo adnumerant, quo fit, ut apud eos Meghreb sie describatur: insula est tribus maribus circumdata. Opinio autem his temporibus recepta ab omnibus, qui has terras incolunt, neque Aegyptum nec Barkam intra fines Meghrebi admittit. Sed Tripoli solum, et omnibus, quæ pone eam occidentem versus habitantur, regionibus, sicut Afrika, Zab, Meghreb el Avset, Meghreb el Aksa, Sus el Adna et Sus el Aksa, constituitur Meghreb secundum hujus ævi universam sententiam. Antiquitus hæ jam laudatæ terræ domicilia continuerunt Berberorum. Meghreb el Aksa inter Vadi Meluija ab oriente, et Asfi, emporium maris Atlantici, et Deren montem ab occidente, extenditur. Maximam hujus regionis partem occuparunt tribus Mesmâdæ, e populo montis Deren, Berghuata, Ghomara, cujus termini Tuvija in vicinitate Ghasasæ fuerunt. Inter eos haud pauci habitarunt e tribubus Sanhadja, Metghera, Eureba al. Hæc terra ita circumscribitur, ut sit ab occidente mare atlanticum finis,*

*mare mediterraneum a septemtrione, a ceteris partibus montes alti et spissi, sicut a meridie mons Deren et ab occidente Montes Tazi. Nam montes plurimi et maxime spissi prope ad maria sese quasi colligunt, quia rerum natura ita comparatum est, ut maria eos arceant. Itaque in Meghreb montes plurimi inveniuntur, quorum incolæ in primis sunt tribus Mesmâdae, pauci tantum Sanhadjitæ. Ceteri Meghrebi campi, Arghar, Tamesna, Tâdila, Ducala visitantur a nomadibus generis berberici et arabicis, qui heic supervenerunt e tribubus Djesm et Rejahh (?). De cetero Meghreb tantum comprehendit populorum numerum, ut nemo, nisi eorum creator, eos omnes cognoscat. Speciem insulæ vel regionis continuæ, montibus maribusque ab aliis separatæ, præbet, cujus caput hoc tempore est Fas, sedes regni, quam præterfluit Vadi Umm Rebîa', fluvius magnus, qui tempore pluviæ adeo tumescit, ut trajici nequeat, quamquam circiter septuaginta milliaria a mari distet. E multis oribus in montibus Deren profectus in planitiem Meghrebi descendit, et in mare magnum (Atlanticum) ad urbem Azemmur sese exonerat. Ex iisdem montibus oritur fluvius etiam alius, qui, meridiem versus defluens, regiones transit Deræ', quæ oases ad radices montis Deren sitæ, palmiferæ, maxime sunt memorabiles ob arborem indigofe-*

*ram ibi crescentem, et merces ex ea confectas. Flumen ab his regionibus nomen suum Dera' accepit, quas pertransit, donec in arenis a meridie regionum Sus evanescat. — Meluija flumen, quo Meglreb el Aksa terminatur, grande est, et, fontes in montibus a Tasi meridiem versus sitis habens, in mare mediterraneum ad Ghasasam defluit. Tribus Miknâsæ, unde nomen adhuc habet urbs Miknâsa, olim juxta hunc fluvium habitarunt; nostro autem tempore populus e Zenâta oriundus in oasibus, quæ ad superius flumen una serie pertinent et nomine Vetât insigniuntur, hunc incolit tractum, quem fluvius ille præterfluit. Ceteras regiones illi contiguas gentes incolunt berbericæ, præcipue Betalsa, qui fratres sunt Miknâsæ. Ex iisdem fontibus, ac flumen jam descriptum, aliud exoritur magnum, quod meridiem versus, inclinatione ad orientem paullulum facta descendens El A'rk secat, usque dum Ludam et deinde Lementit adlingat; hoc tempore Kebir (i. e. magnum) adpellatur, suasque habet oases. Postquam Lementit præterfluxit, in Desertum effunditur et eo loco sese demergit, ubi oases nomine Rekân cognitæ sitæ sunt. A Luda orientem versus pone El A'rk jacent Tesanit oases, quæ ad Desertum pertinent. Quae, ab oriente harum oasium, usque ad planitiem Ticurarin plus trecenta milliaria longitudine*

*sese extendentes regiones, ad unum fluvium, ab occidente ad orientem fluentem, sitae sunt, eas tribus Zenatae incolunt. — Regio quae Meghreb el Adna vocatur a tribubus Zenatæ, sicut Mughrava et Beni Jefrun occupata est, quibus Medjúna, Mughîla, Cumija, Methgera et Metmâta se conjunxerant. Postea vero in possessionem venit aliarum tribuum, Beni Vemanva inquam et Beni Beluhi; et deinde Benu A'bd el Vad et Tudjin e Beni Badin eam occuparunt. Hoc ævo Tilimsân, sedes regia, ejus est caput, cui vicina erant orientem versus domicilia Sanhadjæ ad Eldjizair, Elmetidjam et Elmedijam et, quæ sequuntur usque ad Bidjajam, regiones. Nostris temporibus hæ tribus nuper ad occidentem sese converterunt. Vadi Schelf Beni Vatil, flumen amplum, a monte Râschid in Deserto sito proficiscens, heic præterfluit; quod, postquam eam partem regionis Telul, quæ jam terræ Belad Hhazin nuncupatæ adnumeratur, primum transiit, ad occidentem se inclinans, ceteris fluviis Meghrebi el Avset, sicut Menba al. in se receptis, inter Kelmenitu et Musteghânim in mare mediterraneum influit. Alius quoque fluvius Vadi Schedi adpellatus ex iisdem oritur scaturiginibus, qui, orientale montis Raschid latus initio sequens, Zab præterfluit, donec in terram salsuginosam, inter Tuzer et Ne-*

*frâvam notissimam, abeat. — Regiones Bidjajæ et Kusentinæ domicilia fuerunt Zevâvae, Ketamae, A'djísae et Hevvârae, quae jam ab Arabibus incoluntur, montibus exceptis inaccessis, ubi harum tribuum reliquiæ adhuc vivunt. — Omnis Afrika usque ad Tripolin, quæ campos patentes et æquos tota continet, tribus Nekzâvæ, Beni Jefrun, Nefúsæ, Hevvaræ ceterasque Berberorum, quæ domos fixas non habebant, olim complexa est, et caput terræ fuit Keirevân; hodie autem heic dominantur Arabes e tribu Suleim, quibus jam parent Benu Jefrun et Hevvâra ab iis devictæ, cum iis adeo commixtæ, ut linguam propriem berbericam oblitæ arabicam nunc loquuntur; at in omnibus vitæ rationibus consuetudines servarunt antiquas. Sedes imperii regionisque caput nunc Tunis est, quam præterfluit Vadi Medjcrda, flumen magnum, quod in se ceteros tractús amnes recipit et in loco Benzert dicto, unius stationis iter a Tunis dissito, in mare mediterraneum incidit. — Barkæ monumenta jam sunt deleta, urbes destructæ et fortuna potentiaque plane eversa. Quæ quondam inhabitarunt tribus berbericæ Hevvâra, Levâta et aliæ, loca in Arabum potestatem redierunt. Habuit tamen olim etiam hæc terra urbes suas amplissimas, quarum Bedam, Zevilam, Barkam, Kasr Hhassân nominasse sat erit, ubi nunc omnia deserta jacent, quasi nullæ umquam ibi fuissent urbes."*

In duobus sequentibus capitibus partim Berberorum præ aliis gentibus præstantiam [7]) laudibus tollit et mores breviter delineat, partim historiam variarum, et ante et post occupatam a Muslimicis Afrikam usque ad regnum Aghlebitarum, constitutum, in universum spectatam enarrat [8]). Divisionem tribuum supra laudatam sequens, deinde (a fol. LI) recensionem incipit harum omnium tribuum, adeoque hanc rem pertractat, ut in ramulos genealogiæ minimos penetret, et tabulis ubique genealogicis adjectis res gestas, reges et regna earum diligentissime describat. Familiis a Madghisch originem petentibus, *Butur* (بُتُر) etiam vocatis, recensitis, ad secundam (in fol. LXII) illam principalem gentem, quæ *Bernes* (برنس pl. برانس) adpellatur, describendam transit Ibn Khaldûn. Ex ejus tribubus *Sanhadjam* omnium frequentissimam et validissimam fuisse observat (fol. LXVIII). Ut narratio apertior fieret, hanc gentem in tres classes (طبقات) divisit, quarum primam et secundam eæ efficiunt tribus, quæ imperium aliquod condiderunt; in tertia autem eæ collocantur, quæ numquam regno constituendo inclaruerunt. *Belcâna*, quæ per *Badisitas*, *Beni Hhamad* cet. imperavit, primum ducit ordinem; secundum occupant eæ tribus Sanhadjæ, quæ nomine *Mulathimin* (الملثمون i. e. *Velati*) insigniuntur (fol. LXXXI.). Caput, quod harum tri-

buum historiam tractat, sic inscribitur: الطبقة الثانية من صنهاجة وهم الملثمون وما كان لهم بالمغرب من الدولة i. e. *Secunda Sanhadjæ classis, quæ est Mulathimun, et regna, quæ in Meghreb tenuerunt.* Omnium harum tribuum maxima fuit *Lemtúna.* Primum religioni magicæ (Idololatriæ) addictæ erant. Regnante A'bd el rahhmân ben Muavîja dux earum fuit *Telacakin ben Vercûb Evraken ben Vetitec* (تلاكاكين بن وركوب اوراكن بن وتيطف), cui successit *Tilutan* (تيلوتان). Aliæ tribus memoria dignæ sunt *Gedala* et *Mesûfa.*

Heic notandum mihi videtur, Ibn Khaldunum Murabitos a Mulathimin evidenter distinxisse. In sequenti enim capite *(de Historiâ dynastiæ Murabitorum, e gente Lemtuna oriundorum, et regni quod in utroque littore (Meghrebi et Hispaniæ) possederunt; deque primordiis eorum et fatis extremis* (الخبر عن دولة المرابطين من لمتونة وما كان لهم بالعدوتين من الملك واوّليّة ذلك ومصايره fol. LXXXII) ita de Murabitis loquitur, ut partem tantum tribuum, nomine Mulathimin insignium, eos faciat. Jam ab Abulfeda (vide ed. Reisk. Tom. III. pag. 150. seqq.) constat, consuetudinem esse Historicorum vulgo receptam, has duas denominationes confundere, ac si Murabiti utramque rece-

pissent, unde nomen Mulathimin dynastiæ Murabitorum temere forsan inditum est. Apud Ibn Abi Zera' nullum vocis Mulathimun, Murabitis distinctionis caussa additæ, vestigium vidi. Veritati igitur sine dubio propior accedit Ibn Khaldûn, qui denominationem Mulathimun a more faciei velandæ, his tribubus communi, ortam, temporibus A'bd allahi ben Jasin, Murabitorum sectæ conditoris, antiquiorem fuisse, statuere videtur. Ex quibus sequitur, nomen Mulathimun multo latius patere, quam Murabitun.

In rebus gestis Murabitorum enarrandis, cum Ibn Abi Zera' plerumque consentit Ibn Khaldûn; si quid aliud invenero, id optime ad ipsum fragmentum adnotabitur. Quæ de cetero hoc Ibn Khalduni volumen de aliis Berberorum tribubus continet, quum a re longius absint, missa facio [9]).

## الخبر عن ظهور الدولة المرابطة اللمتونيّة وقيامها بالقبلة والمغرب وبلاد الاندلس وذكر ملوكهم ومدة ايامهم الى انقضايها وذهابها

ذكر محمد بن الحسن بن احمد بن يعقوب الهمدانى صاحب كتاب الاكليل فى الدولة الحميرية ان لمتونة [1] فخذ من صنهاجة وصنهاجة فخذ من ولد عبد شمس بن وائل بن حمير وان الملك افريقش [2] بن وائل بن حمير لما ملك حمير خرج غازيا نحو بلاد المغرب وارض افريقية فلما توغل بالمغرب بنا مدينة افريقية وهى مشتقة من اسمه وخلف بها من قبايل حمير وزعمايها صنهاجة ليردوا البربر عن شاكلتهم وياخذوا خراجهم ويدبروا امرهم، وروى ابو عبيدة عن ابن الكلبى ان افريقش لما نقل البربر عن الشام ومصر الى المغرب وبنا مدينة افريقية وانزل البربر [3] منازلهم من المغرب ترك فيهم قبيلتين من دهاته وهما صنهاجة وكتامة فهما فى البربر الى اليوم، وقال الزبير بن بكار انّ صنهاج ابو صنهاجة هو صنهاج بن حمير بن سبا ولد حمير من سبا لصلبه، وقال ابو فارس عبد العزيز الملزوزى الشاعر فى ارجوزته فى التاريخ المسمى بنظم السلوك فى الانبياء والخلفاء والملوك

---

[1]) Ba explicationis caussa addit: اهل اللثام وهم المرابطون [2]) L. addit: بن برهت ذى المنار بن الحارث الرايش بن شدّاد بن الملطاط [3]) Ups. vocabulum prætermittit; Lectionem P. recepi. Ceteri بن عمرو بن الصوار بن عبد شمس العرب

مرابطون [4] اصلهم من حمير  قد بعدتْ انسابهم عن مُضَر
وانّ صنهاجَ ابوه حمير  وهو ابنه لصلبه لا العنصر [5]
اكرم به من نسب صريح [6]  فقله لا تخفيه بالتصريح
وعدلهم وفضلهم مشهور  ومجدهم [7] وسعدهم مذكور

وقيل صنهاجة فخذ من هوارة وهوارة فخذ من حمير يمانيون [8] من ولد الحصورى بن وائل بن حمير وانما سموا هوارة لان امهم المشهور لما اجال فى البلاد ووقع بالمغرب بقبلة القيروان من بلاد افريقية قال لقد تهورنا فى البلاد فسموا هوارة بذلك والله اعلم، وتنقسم صنهاجة على سبعين قبيلة منهم لمتونة، وجدالة [9]، ومسوفة، ولمطة [1]، ومسراتة [2]، وتلكاتة [3]، ومدّاسة [4]، وبنو وارث [5]، وبنو مشليز [6]، وبنو دخير، وبنو زياد، وبنو موسى، وبنو لماس [7]، وبنو فشتال، وفى كل فرقة وقبيلة بطون

---

[4]) L. انّ المرابطين quod vetat metrum. [5]) Be لعنصر [6]) U. vitiose صريخ et in versu sequenti بالتصريخ [7]) Ita L. Ups. فجدّهم P. et Ch. فخرهم [8]) Verba sequentia usque ad حمير omittunt U. P. Ch. et Ba. [9]) L. ودكالة At in sequ. cap. semper جدالة *Moura:* Jedala. *Dombay:* die Kedaler. P. et Ch. وكدالة Be كُدالة
[1]) U. امطة — [2]) Ita semper Ibn Khaldûn. U. مسروتة Bc مسرابة L. مسراتة. *Moura* Masserata; *Dombay:* Mesrajer. [3]) P. تلكانة. Ibn Khaldûn rectius ut videtur بلكانه *Moura:* Talcana; *Dombay:* Telkater.
[4]) Ibn Khaldûn: مندّاسة [5]) Ita Bc et Ibn Khaldûn. *Moura:* Beni Varet. *Dombay* Benu Varits — Ceteri بنو ورب [6]) Bb. مشليس Bc مسليز Ch. مسفير *Moura:* Beni Sefian; *Dombay:* Benu Meslin.
[7]) L. لمساسة P. لماش Ch. لاش. *Moura:* Beni Almaxa. *Dombay:* Benu Lûnas.

والخاذ وقبايل اكثر من ان تحصى وهذه القبايل كلها صحراويون [8] بلادهم فى القبلة مسيرة سبعة اشهر طولا ومسيرة اربعة اشهر عرضا من نول لمطة [9] الى قبلة افريقية وقبلة القيروان من بلاد افريقية وهى ما بين بلاد البربر وبلاد السودان وهو [1] قوم لا يعرفون حرثا ولا ثمارا وانما اموالهم الانعام وعيشهم من اللحم واللبن يقوم احدهم عمره فلا ياكل خبزا الا ان يمرّ ببلادهم التجار فيتحفونهم بالخبز والدقيق واكثرهم على السنة والجماعة يجاهدون السودان، وكان اول ملك منهم بالصحراء تَيَوْلُوثان بن تيكلان الصنهاجى اللمتونى ملك بلاد الصحراء باسرها ودان له بها ازيد من ملوك السودان كلهم يودون اليه الجزية، وكان عمله مسيرة ثلاثة اشهر فى مثلها كلها عامرة وكان يركب فى مائة الف نجيب، وكان فى ايام الامام عبد الرحمان القايم بالاندلس ودامت ايامه وطال عمره نحوا من ثمانين سنة الى ان توفى فى سنة اثنتين وعشرين ومائتين فولى بعده حفيده الاثر بن بطين [2] بن تيولوثان المذكور فقام بامر صنحاجة الى ان توفى سنة سبع وثلاثين ومائتين [3] فكانت ايامه خمسا وستين سنة، فولى بعده ولده تميم بن الاثر [3] فاقام ملكا على قبايل صنهاجة الى سنة ست وثلاثمائة فقامت عليه اشياخ قبايل صنهاجة فقتلوه فافترق امرهم فلم يجتمعوا على احد بعده فاختلفت كلمتهم وتفرقت امراؤهم [4] مدة من مائة وعشرين سنة الى ان قام فيهم الامير ابو عبد الله محمد بن تيفات المعروف بتنارسنا [5] اللمتونى فاجتمعوا عليه وقدّموه على انفسهم وكان من اهل الدين والفضل والصلاح والحج والجهاد فاقام اميرا على صنهاجة مدة من ثلاثة اعوام الى ان

---

[8]) P. صحرا ويرمون [9]) L. et Ibn Khaldûn ita scribunt. U. لمطة
[1]) Ceteri codd. ومنهم [2]) L. يالاثن بن يطبى P. et Ch. الاثر بن يطبر Bb. الاثر بن يطير Bc. الاثر بن قطين. *Moura:* Elatir filho de Batir; *Dombay:* Elaïsis ben Batir. [3]) L. سبع وثمانين ومايتين [4]) Ceteri omnes præter Ch. اهواؤهم [5]) L. بتارشنا

استشهد فى غزوة له بموضع يقال له بقارة[6] وهم قبايل من السودان يسكنون مقربة من مدينة تانكلاسين غربا منها كانوا على دين اليهودية ومدينة تانكلاسين يسكنها قبيلة من صنهاجة يعرفون ببنى وارث وهم قوم صالحون على السنة والجماعة اسلموا على يد عقبة بن نافع الفهرى ايام فتح المغرب وهم يجاهدون[7] السودان الذين هم على غير الاسلام، فلما توفى الامير ابو عبد الله بن تيفات اللمتونى ولى امر صنهاجة بعده صهره يحيى بن ابراهيم الجدالى ۞

## الخبر عن دولة الامير يحيى بن ابراهيم الجدالى وقيامه بامر صنهاجة

ولى الامير يحيى بن ابراهيم الجدالى بعد وفات محمد بن ترسنا اللمتونى وجداله[8] ولمتونة اخوة يجتمعون فى اب واحد وهم يسكنون اخر بلاد الاسلام ويحاربون السودان ويليهم من جهة المغرب البحر المحيط فاقام الامير يحيى بن ابراهيم على رياسة صنهاجة وحروبهم مع اعدايهم الى سنة سبع وعشرين واربع مائة فاستخلف ولده ابراهيم بن يحيى على رياسة صنهاجة وحروبهم مع اعدايهم وارتحل الى المشرق برسم حج بيت الله الحرام وزيارة قبر النبى عليه السلام فوصل فقضى حجه وزيارته وقفل[9] الى بلاده فمر فى طريقه بمدينة القيروان فلقى بها الفقيه الصالح ابا عمران موسى ابن ابى حاج[1] الفاسى كان قد رحل من مدينة فاس فاستوطن القيروان[2] ياخذ

---

6) L. مبقارة Bc ققارة Ch. فغارة. *Moura:* Fagara; *Dombay:* Nekara.
7) L. et P. وهو يجاهد 8) L. وكذلك المتونية 9) L. et ceteri اقبل
1) U. موسى الحاج Ch. ابن ابى الحام *Dombay:* ben Hudschasch. 2) L. semper القروان

عن ابى الحسن القابسى ثم رحل الى بغداد فحضر بها مجلس الفقيه القاضى ابى بكر الطيب فاخذ عنه علما كثيرا ثم عاد الى القيروان فلم يزل بها حتى توفى رحمه الله لثلاث عشر ليلة خلت من شهر رمضان المعظم سنة ثلاثين واربع مائة ، فلما وصل يحيى بن ابراهيم السجدالى الى القيروان الفى [3] بها ابا عمران الفاسى يدرس العلم فجلس اليه وسمع منه فرءاه ابو عمران محبا فى الخير فاعجبه حاله فساله عن اسمه ونسبه وبلده واخبره بذلك واعلمه بسعة بلاده وما فيه من الخلق فقال له ومن ينتحلون [4] من المذاهب فقال له انهم قوم غلب عليهم الجهل وليس لهم كثير علم فاختبره الفقيه وساله عن موجبات دينه ولم يجده يعرف من دينه شيا ولا يحفظه لا من الكتاب ولا من السنة الا انه حريص على التعلم صحيح النيّة والعقيدة واليقين جاهل بما يصلح دينه فقال له ما يمنعك من تعليم العلم فقال له يا سيدى انّ اهل بلادنا قوم عمّهم الجهل ليس فيهم من يقرا القران وهم مع ذلك يحبّون الخير ويرغبون فيه ويسارعون اليه لم يجدوا [5] من يقرئهم القران ويدرسهم العلم ويفقههم فى دينهم ويدعوهم الى العلم بالكتاب والسنة ويعلّمهم شرايع الاسلام ويبيّن [6] سنن النبى عليه السلام فلو ابغيت [7] الثواب من الله تعالى فى تعليمهم الخير لبعثت معى الى بلدنا بعض طلبتك وتلاميذك فيقرئهم القران ويفقههم فى الدين فينتفعون به ويسمعون له ويطيعون فيكون لك فى ذلك الاجر العظيم والثواب الجسيم عند الله تعالى اذ تكون سببا لهدايتهم ، فندب الشيخ الفقيه ابو عمران تلاميذه الى ذلك

---

[3]) U. لقى Ceteri [4]) L. وما يسحبون P. ومن يمتحنون
[5]) L. اردت [6]) L. ويبذلهم [7]) لو وجدوا

فامتنعوا منه واشفقوا من دخول الصحراء ولم يجبه منهم احد ممن يرضاه الشيخ فلما يئس منهم قال له انى اعرف ببلاد نفيس من ارض المصامدة فقيها حادقا[8] تقيا ورعا لقينى هنا واخذ عنى علما كثيرا وعرفت ذلك منه اسمه وجاج[9] بن زلوا[1] اللمطى من اهل السوس الاقصى وهو الان يتعبد ويدرس العلم ويدعوا الناس الى الخير فى رباطة هنالك وله تلاميد جملة يقرؤن عليه العلم اكتب له كتابا لينظر فى تلاميده من يبعثه معك فسر اليه فعنده تجد ما تريد، فكتب اليه الفقيه ابو عمران كتابا فيه، سلام عليك ورحمة الله تعالى اما بعد اذا وصلك حامل كتابى هذا هو يحيى بن ابراهيم الجدالى فابعث معه الى بلده من تثق بدينه وورعه وكثرة علمه وسياسة ليعلمهم القران وشرايع الاسلام ويفقههم فى دينهم ولك وله فى ذلك الثواب والاجر العظيم والله لا يضيع اجر من احسن عملا والسلام، فسار[2] يحيى بن ابراهيم الجدالى بكتاب ابى عمران حتى وصل الفقيه وجاج بمدينة نفيس فسلم عليه ودفع اليه الكتاب وذلك فى شهر رجب الفرد سنة ثلاثين واربع مائة فقرا الفقيه وجاج الكتاب ثم جمع تلاميده فقراه عليهم ونبدهم لما امر به الشيخ ابو عمران الفاسى فانتدب لذلك رجل منهم جزولى النسب يعرف بعبد الله بن ياسين[3] الجزولى وكان من حذاق الطلبة الاذكياء النبهآء النبلآء من اهل الدين والفضل والتقى والفقه والادب والسياسة مشارك فى العلوم فخرج مع يحيى بن ابراهيم حتى وصل الى بلاد جدالة فتلقاه قبايل جدالة ولمتونة بالسرور وفرحوا به غاية وبالغوا فى اكرامه وبره ۞

---

[8]) L. حادثا [9]) U. semper وجاج, ut in aliis nominibus ubi littera ج occurrit.

[1]) Ch. زلوان *Moura:* Zaluan. [2]) L. فشا [3]) L. semper بن يس

## الخبر عن دخول [4] الفقيه عبد الله بن ياسين الجزولى بلاد صنهاجة وقيامه بها مع لمتونة والمرابطين من قبايل صنهاجة [5]

هو عبد الله بن ياسين ابن مكوك بن سير على بن ياسين الجزولى لما وصل مع يحيى بن ابراهيم الى بلاد صنهاجة ونزل بساحتهم ورأ المنكرات ظاهرة فيهم شايعة عندهم ووجد الرجل منهم تتزوج ست نسوة وسبع نسوة وعشرة وما شاء فانكر ذلك عليهم ونهاهم عنه وقال لهم ليس هذا من السنة وانما سنة الاسلام ان يجمع الرجل بين اربع نسوة حرايز فقط وله سعة فيما شاء من ملك اليمين فجعل يعلمهم الدين ويبين لهم الشرايع والسنة يامرهم بالمعروف وينهاهم عن المنكر فلما راوه شدّد [6] فى ترك ما هم عليه من المنكرات تبرؤا منه وهجروه ونفروه وثقُلَ [7] ذلك عليهم ومع ذلك فانه وجد اكثرهم لا يصلون وليس عندهم من الاسلام الا الشهادتين وقد غلب عليهم الجهل ، فلما رءا عبد الله بن ياسين اعراضهم عنه واتباعهم اهواءهم اراد الرحيل عنهم الى بلاد السودان الذين دخلوا فى الاسلام اذ كان الاسلام

---

[4]) L. دولة [5]) In omnibus codicibus, Upsaliensi excepto, heic mira occurrit repetitio eorum, quæ jam pagina 339 supra dicta sunt: Quibus usque ad verba: بموضع يقال بقارة محمد بن تيفات المعروف الخ in L. insuper hæc addita leguntur ودفن بموضع يسمى كريفلة. Quæ autem in U. exstant هو عبد الله usque ad قال لهم الخ desunt. Cum his conspirant versiones *Doinbay* et *Moura*. [6]) U. شدّ عليه
[7]) L. ونفده بفعل

بها قد ظهر فلم يتركه يحيى بن ابراهيم الجدالى وقال له انى لا اتركك تنصرف وانما اتيت بك لانتفع بعلمك فى خاصة نفسى ودينى وما على من ضلّ من قومى [8] ولاكن يا سيدى هل لك فى راى اشير به عليك ان كنت تريد الاخرة، قال وما هو قال ان هاهنا فى بلدنا جزيرة فى [9] البحر اذا حسر [1] البحر دخلنا اليها على اقدامنا واذا ملا دخلنا فى الزوارق وفيها الحلال المحض [2] الذى لا تشكّ فيه من الشجر البرية وصيد البرّ والبحر من اصناف الطير والوحش والحوت فندخل اليها فنعيش فيها بالحلال ونعبد الله حتى نموت، فقال له عبد الله بن ياسين هذا احسن فهلّم بنا [3] ندخلها على اسم الله تعالى، فدخلاها ودخل معهما سبعة نفر من جدالة فابتنا بها رابطة واقام بها مع اصحابه يعبدون الله تعالى مدة من ثلاثة اشهر، فتسامع الناس بخبرهم وانهم يطلبون الجنة والنجاة من النار فكثر الوراد عليهم والتوابون فاخذ عبد الله بن ياسين يقرئهم القران ويستميلهم الى الخير ويرغّبهم فى ثواب الله تعالى ويحذّرهم اليم [4] عذابه حتى تمكن حبه فى قلوبهم فلم تمرّ عليه حتى اجتمع له [5] من تلاميذه نحو الف رجل من اشراف [6] صنهاجة فسماهم المرابطين للزومهم رابطته واخذ يعلمهم الكتاب والسنة والوضو والصلاة والزكاة وما فرض الله عليهم من ذلك فلما تفقهوا فى ذلك وكثروا اقام فيهم خطيبا فوعظهم وشوّقهم الى الجنة وخوّفهم النار وامرهم بتقوى الله والامر بالمعروف والنهى عن المنكر واخبرهم بما فى ذلك من ثواب الله تعالى وعظيم الاجر ثم دعاهم الى جهاد من خالفهم من قبايل صنهاجة وقال لهم معشر المرابطين انكم جمع كثير

---

[1]) L. من [2]) L. المحيط [3]) U. بها [4]) L. من P. ألَم et P. احسن
[5]) Ceteri codd. melius forsan عليه [6]) U. اصناف
[8]) In U. hæc duo vocabula desunt. [9]) Ceteri codices من

وانتم وجوه قبايلكم ورؤساء عشايركم وقد اصلحكم الله تعالى وهدئكم الى صراطه المستقيم فوجب عليكم ان تشكروا نعمته عليكم وتامرون بالمعروف وتنهون عن المنكر وتجاهدون فى سبيل الله حقّ جهاده، فقالوا له ايها الشيخ المبارك مُرْنا بما شيت تجدنا سامعين لك مطيعين ولو امرتنا بقتل ابانا لفعلنا، فقال لهم اخرجوا على بركة الله تعالى وانذروا قومكم وخوّفوهم عقاب الله وابلغوهم حجته فان تابوا وانابوا [7] ورجعوا الى الحقّ واقلعوا مما هم عليه فخلوا سبيلهم وان ابوا عن ذلك وتمادوا فى غيهم ولجّوا فى طغيانهم استغثنا [8] بالله تعالى عليهم وجاهدناهم حتى يحكم الله بيننا وهو خير الحاكمين، فسار كل رجل منهم الى قومه وعشيرته فوعظهم وانذرهم ودعاهم الى الاقلاع عمّا هم بسبيله [9] فلم يكن منهم من يقبل ولا يرجع، فخرج اليهم عبد الله بن ياسين فجمع اشياخ القبايل ورؤسأهم وقرا عليهم حجة الله ودعاهم الى التوبة وخوّفهم عقاب الله فاقام ينذرهم سبعة ايام وهو فى كل ذلك لا يلتفتون الى قوله ولا يزدادون الا فسادا، فلما يئس منهم قال لاصحابه قد ابلغنا الحجة وانذرنا وقد وجب علينا الان جهادهم فاغزوهم على بركة الله تعالى، فبدا اولا بقبايل جُدالة فغزاهم فى ثلاثة عالاف رجل من المرابطين فانهزموا بين يديه فقتل منهم خلقا كثيرا واسلم الباقون اسلاما جديدا وحسنت حالتهم وادوا ما يلزمهم من جميع ما فُرِضَ عليهم وذلك فى شهر صفر سنة اربع وثلاثين واربع مأئة، ثم سار الى قبايل لمتونة فنزل بهم وقاتلهم حتى ظهر عليهم وادعنوا الى الطاعة وتابوا وبايعوه على اقامة الكتاب والسنة، ثم سار الى قبايل مسوفة فغزاهم حتى ادعنوا له وبايعوه على بايعته. قبايل لمتونة وجدالة، فلما راء ذلك

---

[7]) In ceteris codd. abest. Septem quæ sequuntur voces desunt in P. et Ch. [8]) Secundum L. et Ch. P. autem استعنّا U. استغنى [9]) L. عليه

قبايل صنهاجة فتسارعوا الى التوبة والى مبايعته واقرّوا له بالسمع والطاعة فكان كل من اقبل اليه تايبا منهم طهّره بان يضربه مأئة سوط ثم يعلمه القرءان وشرايع الاسلام ويامرهم بالصلاة والزكاة واخراج العشر وجعل لذلك [1] بيت مال يجمعها فيه واخذ يركب منه الجيوش ويشترى السلاح ويغزو [2] القبايل حتى ملك جميع بلاد الصحراء واستولى على قبايلها وجمع اسلاب المقتولين فى تلك الغزوات وجعلها فيًا للمرابطين وبعث بمال عظيم مما اجتمع عنده من الزكاة والاعشار والاخماس الى طلبة بلاد المصامدة وقضاتها فاشتهر امرهم فى جميع بلاد الصحراء وبلاد القبلة وبلاد المصامدة وساير المغرب وانه قام رجل بسجدالة [3] يدعوا الى الله والى الطريق المستقيم ويحكم بما انزل الله وانه متواضع زاهد فى الدنيا وانتشر ذلك عنه فى بلاد السودان، وتوفى يحيى بن ابراهيم السجدالى فاراد عبد الله بن ياسين ان يقدم غيره فى موضعه ليقوم بحروبهم وكان اكثر قبايل صنهاجة طايعة لله تعالى ودينا وصلاحا لمتونة فكان عبد الله بن ياسين يكرمهم ويشرفهم على قبايل صنهاجة [4] وذلك لما اراد الله تعالى من ظهور امرهم وتملكهم على المغرب والاندلس فجمع عبد الله بن ياسين برؤساء القبايل من صنهاجة فقدم عليهم يحيى بن عمر اللمتونى وامره على سايرهم وعبد الله بن ياسين هو الامير على الحقيقة لانه هو الذى يامر وينهى ويعطى ويباخذ فكان الامير يتولى النظر في امور حروبهم وعبد الله بن ياسين ينظر فى دياناتهم واحكامهم ويباخذ زكاتهم واعشارهم ۞

---

[1]) U. تلك [2]) L. ويعرف [3]) L. السجدالة [4]) In U. librarius ea quæ sequuntur usque ad تقدم transilivit.

## الخبر عن الامير يحيى بن عُمَر بن تلاكاكين الصنهاجى اللمتونى

لما قدم عبد الله بن ياسين يحيى بن عمر اللمتونى المرابط وكان من اهل الدين المتين والفضل [5] والورع والزهد فى الدنيا والصلاح لامره [6] بالجهاد وكان يحيى شديد الانقياد لعبد الله بن ياسين كثير الطاعة له فيما يامره به وينهاه عنه فمن حسن طاعته له انه لما [7] قال له يوما وجب عليك ادب قال فيماذا يا سيدى قال له لا اعرفك به [8] حتى اخذه منك فكشف من بشرته [9] فضربه عشرين سوطا ثم قال له انما ضربتك لانك باشرت القِتَال وامضيت الحرب بنفسك وذلك خطا منك فانّ الامير لا يقاتل وانما يقف يحرض الناس ويقوى نفوسهم فانّ حياة الامير حياة عسكره وموته فناء جيوشه، فاستولى الامير يحيى على جميع بلاد الصحراء وغزا بلاد السودان ففتح كثيرا منها فلما كان فى سنة سبع واربعين واربع مائة جمعوا فقهاء سجلماسة وفقهاء درعة [1] وصلحاوهم فكتبوا الى الفقيه عبد الله بن ياسين والى الامير يحيى بن عمر واشياخ المرابطين كتابا يرغبون منهم [2] الوصول الى بلادهم ليطهروها [3] مما هى فيه [4] من المنكرات وشدّة العسف والجور وعرّفوهم بما هم فيه بها اهل العلم والدين وساير المسلمين من الذلّ والصغار والجور مع اميرهم مسعود بن وانودين [5] الزناتى المغراوى، فلما

---

[5]) Deest in U. et P. [6]) U. امره [7]) E codice L. addidi. [8]) L. اعرفك لك [9]) L. ظهره [1]) Varia nominis hujus scriptio ita ut nunc درعه et nunc ذرعة efferatur; quod in Ibn Khaldûno etiam vidi. [2]) U. منه [3]) U. ليطهرها L. ينظرونها [4]) L. et Bb عليه [5]) L. et وانوك; P. et Ch. وانود postea vero lectioni U. congruunt. *Dombay* Wanduwin: *Moura:* Uacud.

وصل الكتاب لعبد الله بن ياسين جمع رؤساء المرابطين وقرا عليهم الكتاب وشاورهم فى الامر فقالوا له ايها الشيخ الفقيه هذا مما [6] يلزمنا ويلزمك فسر بنا على بركة الله تعالى، فامرهم بالجهاد وخرج بهم فى الموفى عشرين لصفر سنة سبع واربعين واربع مائة فى جيش عظيم من المرابطين فسار حتى وصل بلاد درعة فوجد بها عامل امير سجلماسة فاخرجه عنها ووجد بها خمسين الف ناقة كانت فى مراعيها لصاحب سجلماسة مسعود المغراوى فعلم الامير مسعود بذلك فجمع جيوشه وخرج نحوهم فالتقى الجمعان فكانت بينهم حروب عظيمة ثم منح الله تعالى المرابطين فيها النصر على مغراوة فقُتل مسعود بن وانودين المغراوى واكثر جيوشه وفرّ الباقون فاخذ عبد الله بن ياسين اموالهم ودوابهم واسلحتهم مع الابل الذى اخذ [7] فى درعة فاخرج منه [8] خمس جميعه ففرّقه لفقهاء [9] سجلماسة ودرعة وصلحايهم وقسّم الباقى على المرابطين وارتحل من فوره حتى دخل مدينة سجلماسة فقتل بها من وجد فيها من مغراوة واقام بها حتى هدّنها واصلح احوالها وغيّر ما وجد فيها المنكرات وقطع المزامير واحرق الدبار التى كانت بها بيع الخمر وازال المكوس واسقط المغارم المحزنية [1] وترك ما اوجب تركه الكتاب والسنة [2] فقدم عليها عاملا من لمتونة وانصرف الى الصحراء وتوفى الامير ابو زكرياء يحيى بن عمر فى جهاد كان له هنالك ببلاد السودان فقدم الفقيه عبد الله بن ياسين فى مكانه اخاه ابا بكر بن عمر اللمتونى وذلك فى شهر محرم سنة ثمانية واربعين واربع مائة ۞

---

[6]) U. ما et paullo ante omittit الشيخ [7]) L. التى اخذوا

[8]) U. فاخذ منهم [9]) U. فى فقها [1]) L. المخزنية Lectio vera sine dubio est محدثة quæ paullo post occurrit. [2]) Addit P. تركه

## الخبر عن دولة الامير ابى بكر بن عمر اللمتونى المرابط

لما توفى يحيى بن عمر قدم عبد الله بن ياسين عوضا منه اخاه ابا بكر بن عمر وقلده امر الحرب فندب [3] المرابطين الى غزو بلاد المصامدة وبلاد السوس فخرج اليها فى جيوش عظيمة وذلك فى شهر ربيع الثانى من سنة ثمانية واربعين واربع مائة وكان الامير [4] ابو بكر رجلا صالحا متورعا فجعل على مقدمته ابن عمه يوسف بن تاشفين اللمتونى ثم سار حتى وصل بلاد السوس [5] فغزا بلاد جزولة وفتح مدينة ماسّة ومدينة تارودانت [6] وجميع بلاد السوس وكانت بتارودانت قوم من الروافض يقال لهم البانجيلة [7] منسوبين الى على بن عبد الله البانجلى [8] الرافضى كان قدم الى السوس فى حين قام عبيد الله الشيعى بافريقية فاشاع هنالك مذهبه فتوارثوه بعده جيلا بعد جيل وقرنا بعد قرن لا يرون الحق الا ما فى ايديهم فقاتلهم الامير ابو بكر وعبد الله بن ياسين حتى فتح مدينتهم عنوة وقتل بها من الروافض خلق كثير فرجع من بقى منهم الى السنة واخذ اموال من قتل منهم فجعلها فيئا للمرابطين واظهر الله المرابطين وعلا كلمتهم ففتح معاقل بلاد السوس واطاعتهم [9] جميع قبايلها فاخرج عبد الله بن ياسين عماله على نواحيها وامرهم باقامة العدل واظهار السنة فيها واخذ الزكاة والعشر واسقط ما سوى ذلك من المغارم المحدثة وارتحل الى بلاد

---

3) U. فنبذ 4) U. الامام 5) L. السودان. Quæ sequuntur usque ad وكانت in L. desunt. 6) Nominis scriptio sic variat: وتارودنت، تارودانت، تاردنت *Moura:* Albagelia; *Dombay:* Badschila. 7) L. الميحيلة P. et Ch. اليحيلة 8) L. الميحيلى P. اليحلى 9) L. وطاعت اليهم

المصامدة ففتح جبال دَرْن وفتح ايضا بلاد رودة وفتح مدينة شفشاوة [1] بالسيف ثم فتح نفيس وسايِر بلاد جدميوة [2] واتته قبايل رجراجة وحاحة [3] فبايعوه وارتحل الى مدينة اغمات وبها يومئذ اميرها لقوط [4] بن يوسف بن على المغراوى فنزل عليها وضيق عليه الحصار [5] وقاتله اشدّ القتال فلما رأ لقوط ما لا طاقة له به اسلمها له وفرّ عنها ليلا هو وجميع حشمه الى ناحية تادلا فنزل فى حماء بنى يفرون [6] اربابها ودخل المرابطون مدينة اغمات فى سنة تسع واربعين واربع مائة فاقام عبد الله بن ياسين بمدينة اغمات نحو الشهرين حتى استراح المرابطون، ثم خرج بهم الى غزو تادلا ففتحها وقتل من وجد بها من بنى يفرون. من [7] ملوكها وظفر بلقوط المغراوى فقتله ثم سار الى بلد تامسنا ففتحها فاخبر ان بساحلها قبايل برغواطة فى عدد عظيم وانهم مجوس كفّار ☆

## الخبر عن غزو عبد الله بن ياسين مجوس برغواطة وذكر مذهبهم السخيف ودياناتهم الخسيسة

لما وصل عبد الله بن ياسين الى بلاد تامسنا أُخبِر ان بساحلها قبايل بَرْغُواطة فى امم [8] لا تحصى وانهم مجوس اهل ضلال وكفر واخبر بدياناتهم

---

[1]) L. شوشاوة [2]) *Dombay:* Kedmiva. [3]) Bc وجّاجة [4]) L. et Ch. اسقوط. U. P. Bc. القوط. Sed paullo post omnes continue in لقوط conspirant. *Moura:* Lacute; *Dombay:* Alkut. [5]) Ceteri بالحصار [6]) Ita U. et P. L. et ceteri يفرن aut يافرن *Moura:* Beniaferun; *Dombay:* Beni Jefrun. [7]) Deest in P. et Ch. [8]) L. et ceteri عدد

الخبيثة التى تمسكوا بها وقيل له [9] انّ بوغواطة قبايل كثيرة وليس لهم اب واحد ولا ام واحدة وانما هم اخلاط من قبايل شتّى من البربر اجتمعوا الى صالح [1] بن طريف القايم بتامسنا حين ادعا للنبوّة فى ايام هشام بن عبد الملك بن مروان وكان اصله لعنه الله من بَرْناط [2] حصن من عمل شدونة من بلاد الاندلس فكان يقال من تبعه ودخل فى ديانته برناطى فعربته العرب وقالوا برغواطى فسموا برغواطة، وكان صالح بن طريف الذى ادعا فيهم النبوّة رجلا خبيثا يهودى الاصل من ولد شمعون بن يعقوب عليه السلام نشا ببرناط من بلاد الاندلس ثم رحل الى المشرق فقرا على عبيد الله المعتزلى القدرى واشتغل بالسحر فجمع منه فنونا كثيرة وقدم المغرب فنزل بلاد تامسنا فوجد بها قبايل من البربر جهالا فاظهر لهم الاسلام والزهد والورع فاخذ بعقولهم واستمالهم بسحره ولسانه وارام من نوارجه وتمويهاته فاستهواهم بذلك واقرّوا بفضله واعترفوا بولايته فقدموه على انفسهم وصدروا عن [4] رايه فى جميع امورهم ووقفوا عند امره ونهيه فادعا النبوّة وتسمى بصالح المومنين وقال لهم انا صالح المومنين الذى ذكره الله فى كتابه العزيز الذى انزله على محمد صلى الله عليه وسلم وشرع لهم الديانة التى اخذوها عنه وذلك فى سنه خمس وعشرين ومأئة، وكان الضلال الذى شرع لهم يُقِرّون بنبوّته وانهم يصومون شهر رجب ويأكلون شهر رمضان وفرض عليهم عشر صلوات خمسا بالليل

---

[9]) Deest in omnibus, excepto U. [1]) *Dombay:* Salif. *Moura:* Saleh. [2]) L. et B. برباط. Ch. برباط *Moura:* Barnata; *Dombay:* Bernata. [3]) L. P. Ch. Bb. Bc. et Dd. برغاطى. [4]) U. على. Annus qui paullo post occurrit in Ch. et apud *Dombay* CCCCXXV legitur.

وخمسا بالنهار وان الاضحية واجبة على كل مسلم فى الحادى والعشرين من المحرم وشرع لهم فى الوضوء غسل السرة والخاصرتين وصلاتهم ايماء لا سجود فيها ويسجدون فى اخر ركعة خمس سجدات ويقولون عند الطعام والشراب باسم ياكس[5] وزعم ان تفسيره بسم الله وامرهم ان يخرجوا العشر من جميع الثمار واباح لهم ان يتزوّج الرجل من النساء ما شاء ولا يتزوّج من بنات عمه ويطلقون ويرجعون الف مرّة فى اليوم فلا تحرم عليهم المراءة بشى من ذلك وامرهم بقتل السارق حيث وجد وزعم انه لا يطهّره من ذنبه الا السيف وامرهم بالدية من البقر وحرّم عليهم راس كل حيوان والدجاجة مكروه اكله وقد وقتهم فى الاوقات الديكة وحرّم عليهم ذبحها واكلها ومن ذبح ديكا واكله اعتق رقبة وامرهم ان يلحسوا بُزاق[6] ولاتهم تبركا فكان يبصق فى اكفهم فيلحسونه تبركا به ويحملونه الى مرضايهم فيستشفون[7] به ووضع لهم قرانا يقرؤنه فى صلواتهم ويتلونه فى مساجدهم وزعم انه انزل عليه وانه وحى من الله تعالى اليه ومن شكّ فى شى من ذلك منهم فهو كافر، والقران الذى شرع لهم ثمانين سورة سمّاها لهم باسماء النبيين منها سورة ادَمَ، وسورة نوح، وسورة ايوب، وسورة موسى، وسورة هارون، وسورة الاسباط، وسورة فرعون، وسورة بنى اسرايل، وسورة الديك، وسورة الحجر[8]، وسورة الجراد[9]، وسورة الجمل[1]، وسورة هاروت وماروت[2]، وسورة ابليس، وسورة الحشر، وسورة غرائب الدنيا، وفيها العلم العظيم عندهم وامرهم الا غسل من جنابة ألّا من الحرام[3]، وقد ذكرنا اخبار برغواطة

---

5) L. B. omnes et Ch. ياكش  6) Ch. et Ba بصاق  7) L. فينتشفون  8) Ba الجمل  9) U. الفراد  1) Deest in Ba.  2) U. وسورة هاروت، وسورة ماروت  3) U et B omnes المحرّم

وملوكهم مستوفيّة فى كتابنا الكبير المسمى بزهرة البستان فى اخبار الزمان وذكر الموجود مما وقع فى الوجود، قال المولف عفا الله عنه فلما سمع عبد الله بن ياسين بحال برغواطة وما هم عليه من الضلالة رأى ان الواجب تقديم جهادهم على غيرهم فسار الى غزوهم فى جيوش المرابطين، والامير على برغواطة يومئذ ابو حفص بن عبد الله بن ابى عبيد محمد بن مقلد بن البسع بن صالح بن طريف البرغواطى المتنبى [4] فكانت بينه وبين عبد الله بن ياسين حروب عظيمة وملاحم شديدة مات فيها من الفريقين خلق كثير فاستشهد فيها عبد الله بن ياسين الجزولى مهدى المرابطين وريسهم تثقل بالجراح فى الحرب وحمل الى معسكره وبه رمق فجمع اشياخ المرابطين ورؤسائهم فقال لهم يا معشر المرابطين انكم فى بلاد اعدايكم وانى ميت فى يومى هذا لا محالة فاياكم ان تجبنوا فتفشلوا فتذهب ريحكم وكونوا الفة واعوانا على الحق واخوانا فى ذات الله تعالى واياكم والمخالفة والتحاسد على طلب الرياسة فان الله يوتى ملكه من يشاء ويستخلف فى ارضه من احب من عباده وانى قد ذهبت عنكم فانظروا من تقدموه منكم يقوم بامركم ويقود جيوشكم ويغزوا عدوكم ويقسم بينكم فيئكم ويباخذ زكاتكم واعشاركم فاتفق رايهم على تقديم امير الحرب ابى بكر بن عمر اللمتونى فقدّمه عبد الله بن ياسين عليهم باتفاق من جميع اشياخ صنهاجة واجتماع منهم على ذلك وتوفى عبد الله بن ياسين فى عشى يومه ذلك وذلك يوم الاحد الرابع والعشرين لجمادى الاولى سنة احد وخمسين واربع مائة ودفن بموضع يعرف بكريفلة [5] بتامسنا [6] وبنا على قبره

---

[4]) L. Bb. et Bc لمتونى [5]) P. بكريفلة U. بكرفيلة *Moura:* Carifala; *Dombay:* Dscherifela. [6]) Deest in U. et P.

مسجدا، وكان عبد الله بن ياسين شديد الورع فى المطعم والمشرب فكان بطول اقامته فيهم لم ياكل شيا من لحمانهم ولا شرب من البانهم فان اموالهم كانت غير مطيبة[7] لشدة جهلهم فكان يتعيش من لحوم الصيد وكان مع ذلك كثير النكاح يتزوج فى كل شهر عددا من النساء ويطلقهن ولا يسمع بامراة جميلة الا خطبها ولا يجاوز فى مهرها اربعة مثاقيل[8] وكان ياخذ الثلث من الاموال المختلطة ويرى ان ذلك يحلل فاقيها، وذلك شذوذ من الفعل ومما يذكر من فضله وصلاحه ومن بركاته التى شاهدها الناس ان المرابطين خرجوا معه فى بعض غزواته للسودان فنفدوا[9] الماء حتى اشرفوا على التلف[1] فقام عبد الله بن ياسين وتيمّم فصلا ركعتين ودعا الله تعالى وامنّ المرابطون على دعائه فلما فرغ من الدعاء قال لهم احفروا تحت مصلاى هذا فحفروا فوجدوا الماء على مقدار شبر من الارض فشربوا منه واستقوا وملوّا اوعيتهم بماء عذب بارد، ومن بركاته[2] انه نزل منزلا بركة كثيرة الضفادع لا يقدر احد ان يستقر حوله لكثرة نقيقها وصياحها فوقف عليه عبد الله بن ياسين حداها فسكنت الضفادع ولم يسمع لها نقيق فلما تباعد عنها عادت ولم يزل صايما من يوم دخل بلادهم الى ان توفى رحمه الله ومن حسن سياسة فيهم انه اقام فيهم السنة والجماعة فى المدة القليلة[3] وحكم عليهم ان من فاتته الصلاة فى الجماعة ضربه عشرين سوطا ومن فاتته ركعة ضربه خمسة اسواط ۞

---

[7]) B. et L. لم تكن طيبة [8]) Sequentia usque ad ومن بركاته desunt in U. et P. [9]) L. ففقدوا [1]) L. الهلاك [2]) Quæ sequuntur usque ad لم يزل desiderantur in U. P. et Ch. [3]) Voces فى المدة القليلة in U. Ch. et Ba non leguntur.

## الخبر عن دولة الامير ابى بكر بن عمر الصنهاجى اللمتونى

هو الامير ابو بكر بن عمر بن تلاكاكين بن وايافطين [4] اللمتونى المحمدى امه حرة جدالية اسمها صفية لما قدمه عبد الله بن ياسين بايعته قبايل المرابطين من صنهاجة وغيرهم فتمت له البيعة كان اول فعله ان اخذ فى دفن [6] عبد الله بن ياسين فلما فرغ من دفنه عبّاء جيوشه وقصد الى قتال برغواطة [7] مصمّما فى حربه متوكلا على الله تعالى فى جميع اموره فاستاصل برغواطة حتى فروا بين يديه وهو فى اثرهم يقتل ويسبى حتى اثخن فيهم وتفرقت برغواطة فى الشعارى وادعنوا له بالطاعة واسلموا اسلاما جديدا ولم يبق لديانتهم الخسيسة اثر الى اليوم وجمع اموالهم وغنايمهم وقسّمها بين المرابطين ورجع الى مدينة اغمات فاقام بها الى شهر صفر سنة اثنتين وخمسين واربع مائة فخرج بجيوشه الى بلاد المغرب فى امم لا تحصى من صنهاجة وجزولة والمصامدة ففتح بلاد فازاز [8] وجبالها وساير بلاد زناتة [9] وفتح مدايين مكناسة وارتحل عنها [1] الى مدينة لواتة فحاصرها حتى دخلها بالسيف وقتل بها خلقا كثيرا من بنى يفرون وكان دخوله اياها وتخريبها [2] فى اخر يوم شهر ربيع الاخر سنه اثنتين وخمسين واربع مائة فلم تعمر بعدها الى اليوم، فلما فرغ من فتح لواتة ارتحل الى مدينه اغمات

---

[4]) L. B. et Ch. وايافطن [5]) U. كدالية L. كذاثبب [6]) L. دين الله [7]) Desunt quæ sequuntur usque ad حتى in L. Ch. Bc. et Bd. [8]) U. فازان [9]) Ita L. et B. omnes. U. autem et P. habet جناتة, et Ch. غياثة. *Dombay* et *Moura:* Sanata. [1]) Additum e L. [2]) U. وتخريبه لها

وكان قد تزوج بها امراة [3] اسمها زينب بنت اسحاق الهوارى رجل من التجار اصله من القيروان وكانت امراة حازمة لبيبة ذات راى وعقل وجزالة ومعرفة بالامور حتى كان يقال لها ساحرة فاقام الامير ابو بكر معها باغمات من ثلاثة اشهر الى ان قدم عليه رسول من بلاد القبلة فاخبره باختلال الصحراء وكان الامير ابو بكر رجلا صالحا كثير الورع فلم يستحل قتال المسلمين وسفك دماءهم فعزم على السير الى الصحراء ليصلح احوالها ويقيم فيها يجاهد الكفار من السودان، فلما عزم الى الخروج للصحراء طلق زوجته زينب وقال لها عند فراقه لها يا زينب انك ذات حسن وجمال فابيق وانى سايير الى الصحراء برسم الجهاد لعلى ارزق الشهادة والفوز بالاجر الوافر وانت امراة غليظة لا طاقة لك على بلاد الصحراء وانا مطلقك فاذا تمت عدتك فزوجى ابن عمى يوسف بن تاشفين فهو خليفتى على بلاد المغرب، فطلقها ثم ارتحل عن اغمات واخذ على بلاد تدلا حتى خرج الى سجلماسة فدخلها واقام بها اياما حتى اصلح احوالها، فلما اراد السفر منها دعا ابن عمه يوسف بن تاشفين فعقده على المغرب وفوض اليه امره وامره بالرجوع الى قتال من به من مغراوة [4] وبنى يفرون وقبايل البربر وزناتة واتفق على تقديمه اشياخ المرابطين لما يعلموا من دينه وفضله وشجاعته وحزمه ونجدته وعدله وورعه وسداد رايه ويمن نقيبته فرجع يوسف بن تاشفين الى المغرب بنصف جيش المرابطين وارتحل الامير ابو بكر بن عمر بالنصف الثانى الى الصحراء وذلك فى شهر ذى قعدة من سنة ثلاث وخمسين واربع مائة فتزوج يوسف بن تاشفين زينب المذكورة فكانت القايمة بملكه والمدبرة [5] لامره والفاتحة بحسن سياستها اكثر بلاد المغرب

---

[3]) Sequentia ad حازمة desunt in P. et Ch. [4]) In L. desunt sequentia usque ad وشجاعته [5]) L. والمدينة

الى ان توفيت فى سنة اربع مائة، وسار الامير ابو بكر الى الصحراء فهدنها وسكن احوالها وجمع جيوشا كثيرة وخرج الى غزو بلاد السودان فجاهدهم حتى فتح بلادهم مسيرة ثلاثة اشهر، وغلب ايضا يوسف بن تاشفين على اكثر بلاد المغرب واستوثق امره به، فلما سمع الامير ابو بكر بضخامة ملك يوسف بن تاشفين وما فتح الله عليه من بلاد المغرب اقبل اليه من الصحراء ليعزله ويولى غيره فاحس يوسف بن تاشفين بذلك فشاور زوجته فى ذلك الامر فقالت له يا يوسف ان ابن عمك رجل متورع فى سفك الدماء فاذا لقيته فقصر عمّا كان يعهده منك من الادب والتواضع واظهر له غلظة حتى كانك مساويا له ومقاوم ولاطفه مع[6] ذلك بالهدية والاموال والخلع والثياب والطعام والطرف[7] واستكثر من ذلك فانه ببلاد الصحراء وكل شى عندهم من هنا مستطرف، فلما قرب الامير ابو بكر بن عمر من عمل يوسف خرج اليه فتلقاه فى الطريق فسلم عليه وهو راكب سلاما مختصرا ولم ينزل له فنظر الامير ابو بكر كثرة جيوشه فقال له يا يوسف ما تصنع بهذه الجيوش كلها قال له استعين بها على من خالفنى فارتاب ابو بكر من سلامه عليه راكبا ومن جوابه ونظر الى الف بعير موقرة[8] قد اقبلت قال ما هذا الابل الموقرة قال ايها الامير انى جيتك بكل ما معى من مال وثياب وشى من الطعام والادام لتستعين به على الصحراء فازداد تعرفا من حاله وعلم انه لا يتخلا له عن الامر فقال له يا ابن عمى انزل اوصيك فنزل بيوسف ونزل الامير ابو بكر ففرش لهما فرش فقعدا عليه فقال له يا يوسف انى قد ولينك هذا الامر وانى مسؤل عنها[9] فاتق الله فى المسلمين واعتقنى واعتق نفسك ولا يضيع من امور رعيتك شيا فانك مسؤل عنهم

---

[6]) L. et P. على [7]) Deest in omnibus codd., excepto Upsaliensi. [8]) L. مقورة [9]) L. عليه

والله تعالى يصلحك ويمدك ويوفقك للعمل [1] الصالح والعدل فى رعيتك وهو خليفتى عليك وعليهم ، ثم ودعه وانصرف الى الصحراء فاقام بها مدة يجاهد الكفرة من السودان الى ان استشهد رحمه الله فى بعض غزواته رمى بسهم مسموم فمات رحمه الله وذلك فى شهر شعبان المكرم سنة ثمانين واربع مائة بعد ان استقام له امر بلاد الصحراء الى جبال الذهب من بلاد السودان وخلص الامر ليوسف بن تاشفين من بعده ۞

---

[1]) U. للعلم.

## Historia initii dynastiæ Murabitorum, e tribu Lemtûna oriundæ, ejusque in regionibus Afrikæ meridionalibus, Meghrebo et Hispania dominationis; quique fuerint eorum reges, et quantum temporis regnaverint, usque ad imperium plane exstinctum.

*Muhhamed ben Hhassan ben Ahhmed ben Ja'kub* Hamedanensis qui librum *Corona de dynastia Hhimjaritica* [1]) inscriptum composuit, hæc refert. "Lemtûna gens originem ab Hhimjaro ita trahit, ut Sanhâdja, cujus pars est Lemtûna, tribus sit populi Veled A'bd Schems ben Vathel ben Hhimjar adpellati. Quod si quæsiveris, quomodo in Meghreb commigraverit, id sic factum esse invenimus. Tempore, quo rex Afrikesch [ben Berhet Dhi-l Menâr ben Hharith el-Raisch ben Scheddâd ben Meltât ben A'mru ben Sevvar ben A'bd Schems] ben Vathel ben Hhimjar summum in Hhimjaritas exercebat imperium, is expeditione in Meghrebi regiones terramque Afrikæ facta, dum terras Meghrebi peragravit, urbem condidit, et conditam nomine suo Afrikam adpellavit. E tribubus Hhimjariticis et ducibus earum delectu facto, Sanhâdjam heic reliquit, ut urbem ab incursionibus Berberorum defenderet, vectigal, quod e terræ proventu penderent subditi, rite perci-

peret, et novam provinciam in ordinem cogeret." *Abu O'beida* vero, testimonio Ibn Kelbii nisus, aliter res narrat easdem. "Afrikesch, ait, "quum e Syria atque Ægypto ad Occidentem Berberos transferret, et, urbe Afrika condita, domicilia Berberis in Meghrebo adsignaret, duas familias, quas prudentissimas judicabat, Sanhâdjam et Ketâmam inter eos manere jussit. Quo factum est, ut hæ duæ gentes ad nostra usque tempora inter populos berbericæ originis vixerint." Aliam proponit Sanhâdjæ genealogiam *Zobeir ben Bekâr*, dicens, Sanhâdjum, qui pater fuit Sanhâdjæ, filium fuisse Hhimjari ben Seba; qui Hhimjar vere fuerit Seba prognatus. *Abu Faris ben A'bd el A'ziz Melzúzi* poëta in sua Historia, metro Redjez conscripta, quæ *Sertum monilium de Prophetis, Khalifis et Regibus* inscribitur [2]), in eundem sensum de Murabitis sic cecinit:

"Murabitun, quorum genealogiæ a Mudharo longius absunt, ab Hhimjaro sunt profecti.

Fuit enim pater Sanhâdjæ Hhimjar, non ob communem quandam originem, sed quia eum vere procreavit.

Honora igitur eum, propter puram originem; quam manifesta, nec in manifestando aliquid absconde;

Justitia eorum et præstantia notissima est; et gloria et fortuna quoque prædicatur."

Alii vero contendunt, Sanhâdjam tribum esse Hevvâræ, Hevvâram autem ad tribum Hhimjariticam Jemanensem pertinere, quæ e filiis Hhasûra ben Vathel ben Hhimjar originem ducit. Originem denominationis Hevvâræ explicaturi hæc narrant. Pater hujus gentis celebris, quum diversas obiret regiones, in terram tandem devenit Meghrebi, quæ, meridiem versus a Keirevân sita, ad regiones Afrikæ pertinuit. Tunc ille dixisse fertur: *Kad Tehavvarna fil belad* i. e. jam in has regiones per incuriam irruimus. Hinc deinde nomen Hevvâræ genti esse inditum. At nihil statuo — Deus solus, quid verum sit, novit.

Sanhâdja populus est late diffusus et numerosus, ita ut in septuaginta divisus sit tribus, quarum has nominasse sat erit: *Lemtûnam*, *Gedâlam*, *Nefûsam*, *Lemtam*, *Mesrânam*, *Belkânam*, *Mendâsam*, *Beni Vârith*, *Beni Meschlîr*, *Beni Dekhûr*, *Beni Zijâd*, *Beni Musa*, *Beni Lemâs* et *Beni Feschtal*. Unaquæque vero harum stirpium et agminum tantum comprehendit numerum tribuum minorum et familiarum, ut enumerari nequeant. Quæ omnes omnino desertum inhabitant, quod meridiem spectat, regionemque occupant inde a Nul Lemta usque ad terras, quæ Afrikam et Keirevân a meridie adtingunt, sese extendentem longitudine septem mensium et quatuor latitudine. Hæc est

terra, quæ Berberos et Nigritas interjacet. Neque terram colunt, nec satus et fructus quid sint, sciunt; divitiæ enim eorum solæ in pecudibus (camelis et ovibus) consistunt, quarum caro et lac iis victum præbent. Fieri facillime potest, ut aliquis vitam transigat totam, panc numquam fruens, nisi mercator terram forte peragrans panem et farinam dono iis dederit. Plurimi Sunnam sequuntur diemque hebdomadis sextam observant et bellum sacrum contra Nigritas gerunt.

Primus, quem novimus, rex eorum in Deserto fuit *Tejevluthân ben Tikelân Sanhadjita* [3]) e tribu Lemtûna oriundus, qui, imperante A'bd el Rahhmâno in Hispania, omnes Deserti regiones suæ subjecit potestati. Plus viginti reges Nigritarum, imperio ejus obnoxii, tributum ei contulerunt. Adeo regnum dilataverat, ut trium mensium iter longitudine totidemque latitudine porrigeretur, et centies mille equites e nobilium numero in pugnam ducerentur. Postquam imperium sub longa annorum serie gesserat, circiter octoginta annos natus, anno CCXXII (p. Chr. n. DCCCXXX$\frac{VI}{VII}$) obiit. Ei successit nepos *Elather ben Betîn ben Tejevluthân*, qui, donec anno CCXXXVII (p. Chr. n. DCCCL$\frac{I}{II}$) sexaginta annos natus moreretur, tribu-

bus Sanhâdjæ dominatus est. Quo mortuo, patrem in regno consecutus est filius, *Temim ben Elather* nominatus. At patris fortuna filio non licuit frui. Principes enim tribuum Sanhâdjæ rebellantes anno CCCVI (p. Chr. n. DCCCX$\frac{VIII}{IX}$) eum interfecerunt. Quo facto res eorum plane sunt turbatæ; alii enim aliud volebant, emirique varii in varias abibant partes. Centum et viginti annorum spatium hic rerum status permansit, quo Sanhâdjæ tribus unius imperio subjectæ non fuerunt, dum Emirus tandem *Abu A'bd allah Muhhammed ben Teifât Lemtunensis*, nomine *Tarsena* notus, imperium in eas susciperet, dignus ab omnibus omnino judicatus, quem regem tribuum universarum Sanhâdjæ et imperatorem unanimi consensu renuntiarent. Neque opinionem talem fefellit. Vir enim ille fuit virtutibus clarissimus summis; et præcepta religionis strictissime observabat, et liberalitatem generosam mentemque pacificam semper monstrabat, ac armis verbisque pro vera fide pugnare paratum sese obferebat, id quod morte gloriosa in pugna contra Nigritas evidentissime probavit. Tribus quædam eorum prope urbem Tatkelasen ab occidente considerunt et Bekâra sunt adpellatæ. Hæc urbs tribui Sanhadjensi, Benu Varith nominatæ, erat, quæ inde a primis temporibus, quum O'kba ben Nafi' Fehrita, postquam

Meghreb occupaverat, eos ad fidem Muslimicam profitendam cogeret, ad ritum Sunnæ dieique sextæ hebdomadis celebrationem sese tenuerat. Quum illæ Nigritarum tribus religioni Judaicæ essent addictæ, urbisque incolæ contra Nigritas infideles jam antea continue bellum gererent; mox bellum inter eos etiam exarsit. Abu A'bd allah, auxilium his Beni Varith ferens, loco Bekâra ad incolarum nomen adpellato, post tres tantum annos, quam sceptro erat potitus, martyrium passus est. Sedem regiam, ita vacuam relictam, *Jahia ben Ibrahim* Gedalensis, antecessoris pronepos, jam occupavit, eoque regnante novus rerum ordo natus est.

## De regno Jahiæ ben Ibrahim Gedalensis, et quomodo res Sanhâdjæ constituerit.

Mortuo Muhhammedi, Tarsena cognominato [4]), Lemtunensi successit Emirus Jahia ben Ibrahim e tribu Gedâla oriundus. (Gedâla vero et Lemtûna fratres ex eodem patre geniti erant; uterque fines Islamismi ultimos ad Mare usque Atlanticum habitarunt, et Nigritas infideles bello persecuti sunt). Ille Jahia, quum ad annum CCCCXXVII (p. Chr. n. MXXX$\frac{V}{VI}$) tum reipublicæ tribuum Sanhâdjæ administrandæ, tum bellis earum contra Nigritas præfuisset,

desiderio captus est sacræ peregrinationis Meccam perficiendæ et sepulchri prophetæ Medinæ visitandi. Qua re commotus Ibrahimum ben Jahia filium vices suas sustinere jussit; ipse vero Orientem petiit. Postquam omnia, quæ ad sacram peregrinationem sanctique sepulchri visitationem pertinent, rite peregerat, in terram suam reverti constituit. At in itinere, quum urbem Keirevân transiret, Abu O'mrân Musa Ibn Abi Hadj, jurisconsultum pietate insignem, offendit. Qui vir, urbe natali, quæ Fâs erat, relicta, Keirevani sedem aliquamdiu fixerat, ut Abi-l Hhassani Kabesensis, doctoris iis temporibus celebris, institutione frueretur. Deinde vero ampliorem cupiens eruditionem, Baghdadum profectus, consessui Abu Becri ben Tajib jurisconsulti et judicis interfuit, et diversa scientiæ genera ab illo didicit. Magna denique doctrinæ copia instructus Keirevanum remigravit ibique ad diem usque supremum, quem XIII mensis Ramedhâni venerandi anno CCCCXXX (p. Chr. n. die XXVIII Maji MXXXIX) obiit, continue commoratus est. Talem virum Jahia ben Ibrahim Gedalensis, ut ante dictum est, Keirevani scientias docentem invenit, et inter auditores ejus statim consedit. Abu O'mrân, amore boni flagrante in novo discipulo conspecto, conditionem ejus admirans, de nomine, gente et terra, unde venerit, eum interrogavit. Quibus ille ita respondit,

ut vastitatem suæ regionis, et quinam homines eam inhabitarent, exponeret. "Quas sectas" [5]), ulterius quæsivit Abu O'mran, "tui jam profitentur gentiles?" "Hæc est res", ille ait, "iis omnino ignota; ignorantia enim inter eos invaluit et si quid scientiæ possideant, nihili fere id censendum puto." Talibus excitatus responsis, Jahiam ipsum probare coepit jurisconsultus, ut, quantam haberet articulorum fidei cognitionem necessariam, exploraret. Felici successu caruit examen; adeo rudem Jahiam esse perspexit, ut ne minimam quidem Korani particulam, neque aliquod Sunnæ præceptum memoria teneret; sed nihilominus, quamvis jam omnia, quæ religioni suæ convenirent, penitus ignoraret, summam ostendit voluntatem ea discendi, cum animi intentione purissima et fide conjunctam. Quærenti Abu O'mrano, quæ fuerint impedimenta, quominus doctrinam didicerit, Jahia, "O mi domine," inquit, "populares mei in ignorantia tanta sunt demersi, ut inter eos neminem invenias ita litteris imbutum, ut Koranum prælegat. Caveas vero, rogo, ne id culpa eorum factum esse credas. Immo meliora adfectantes ea summopere exoptant; si modo quis fuerit inventus, qui eos Koranum docere voluerit, neque detrectaverit, ad Librum sanctum Sunnamque prophetæ cognoscendam eos vocans, capita religionis præcipua expo-

nere, leges Islamismi et decreta Muhhamedis explicare, ad eum lubentissime adcurrent. Quare te oro et obtestor, ut, si præmium a Deo ter optimo maximo, ob bona iis communicanda, mereri cupieris, quendam e numero discipulorum mecum in patriam mittas meam, qui eos Koranum prælegat atque religionis tradat præcepta. Unde summam capient utilitatem gentiles, qui aures et obedientiam ejusmodi præceptori haud inviti præbebunt; te autem, utpote qui fueris auctor iis in rectam viam ducendis, magna remuneratio et merces præclara apud Deum manebit." Quibus dictis adnuens jurisconsultus Abu O'mrân, discipulos, ut Jahiæ sequerentur exhortationem, instigavit. At nihil profecit; omnes enim timore Deserti ac periculis ibi subeundis perterriti recusarunt, et ne unus quidem inventus est, qui desiderio doctoris satisfacere vellet. Abu O'mrân, quum omnem operam heic vanam esse intelligeret, hortando fatigatus, aliud iniit consilium et Jahiam sic adlocutus est. "In regione Nefîs adpellata, quæ terræ a tribu Mesmâda inhabitatæ adnumeratur, virum novi tam eruditione in jurisprudentia præcellentem acutaque præditum mente, quam pietate et abstinentia clarum, cui nomen est Vegâg ben Zelua. E gente Lemta, quæ Sus el Aksa incolit, originem ducens huc ad me venit, et varias scientias a me edoctus in terram suam revertit. Ubi, ut ex-

ploratum habeo, in recessu quodam jam degens cultui Dei vitam suam dicavit, homines scientias docendo et ad summum bonum excitando semper occupatus. Neque labor felici caruit successu; id quod adfluentia circa eum discipulorum testatur, qui Koranum eo duce discere cupiunt. Litteras ad eum tibi dabo, ut e discipulis aliquem eligat idoneum, quem tecum in patriam mittat tuam. Et profecto spondeo, te, quæ desideraveris, apud eum consecuturum." His igitur dictis consentaneam epistolam scripsit Abu O'mran, hæc fere habentem. "Pax et misericordia divina tecum sunto! Præmissis præmittendis, tibi cognitum feci, hominem, qui has litteras tibi adportavit, Jahiam ben Ibrahim Gedalensem adpellari. Quendam discipulorum cum eo mittas precor, cujus pietati, abstinentiæ, doctrinæ perfectæ et alios gubernandi dexteritati adeo confidas, ut viri illius gentiles Koranum doceat et legibus Islamismi atque ritibus instituat. Quam ob rem, si eam bene perfeceris, a Deo præmium summum tibi redundabit, sicut Ipse ter optimus maximus in Korano (Sur. XII, 56) dicit "Deus præmium ejus qui bona opera præstiterit, non perdet." Valeas!" Jahia hac epistola instructus urbem Nefîs petiit, ubi Vegâg jurisconsultum sibi indicatum invenit, eique, salutatione peracta, epistolam tradidit. Quæ res mense Redjeb anno CCCCXXX (p. Chr. nat. mense

Martii—April. MXXXIX) gestæ sunt. Vegâg, postquam litteras perlegerat, omnibus discipulis convocatis eam recitavit, eosque de consilio Jahiæ hortatus est. Paratum sese professus est A'bd allah ben Jasin Guzulensis, qui ceteris discipulis mentis acumine et promptitudine ingenii, animi sollertia et celsitudine, neque minus religiosa morum conformatione, summa vitæ puritate et abstinentia antecelluit. Quibus virtutibus accessit doctrina tum divinæ scientiæ tum litterarum humaniorum haud spernenda, nec minor regendi experientia et variarum scientiarum cognitio. Ille Jahiæ comitem se præbuit, donec in terram venirent Gedâlæ, ubi tribus Gedâlæ et Lemtûnæ variæ summa animi alacritate et gaudio eum recipientes, honoribus et munificentia eum cumulando inter se invicem certarunt.

## Narratio de A'bd allahi ben Jasin Guzulensis in terram Sanhâdjæ adventu, et quomodo heic una cum Lemtûna et Murabitis e tribubus Sanhâdjæ sit commoratus.

A'bd allah ben Jasin ibn Mecûc ben Seir ben A'li ben Jasin Guzulensis, quum comite Jahiâ ben Ibrahim regiones Sanhâdjæ intrasset ibique consedisset, res plures apud eos vidit late diffusas, quæ legi divinæ nullo modo

erant consentaneæ. Communis nempe heic erat consuetudinis, virum sex vel septem, immo decem, vel potius quot illi placuerint, uxores ducere. Tale facinus ulterius committere eos vetuit, simul commonefaciens eorum, quæ præcipiat lex Islamismi. Vir ad summum quatuor feminas liberas si duxerit, legi convenienter egerit; servarum bello captarum potestatem habeat plenam (Cfr. Coran. Sur. IV, 3)." Deinde fidem muslimicam eos docere, leges, ritus et consuetudines exponere orsus est; quæ lex divina adprobaret quæque defenderet, exposuit. Sed homines, quum intelligerent, eum maximum exserere studium, ut eos ad ea omnino relinquenda, quae jamdiu invaluerant Deo invisa, permoveret; talem Ab'd allahi agendi rationem aegre ferentes, cum deseruerunt, ejusque societatem effugerunt. Cui animo obstinato etiam accessit, quod eorum plurima pars neque preces perageret, neque sacris esset intenta, nec aliud quidquam Islamismi, si duas illas exceperis fidei formulas, apud eos invenireture; sed ignorantia summa eos obruerat. Animo A'bd allahi his omnibus perculso, quum animos videret magis cupiditatibus explendis intentos, quam ad bonum peragendum inclinatos, hominesque a se aversos animadverteret; his terris relictis regiones peragrare constituit Nigritarum, qui jam a primo inde tempore, quo inter eos innotuerat Islamismus, eum erant amplexi. Jahia autem ben Ibrahim

Gedalensis ab illo se separare recusans, "si tibi placuerit," inquit, "ex hac terra discedere, te tamen sequar. Nam ea non fuit caussa, cur huc te deducerem, ut gentiles a vera fide aberrantes solos respicerem; sed potius ut animus meus et religio a tua doctrina caperent utilitatem; vinculum, quod me genti meae conjungit, firmius ne credas, quam cui propinquitati aeternam salutem praeferam. Consilium si tibi, mi Domine, proposuerim vitam spectans futuram, num aures mihi benignas praebebis?" "Quid sentias," Jahia respondit, "ingenue dicas." Tum ille: "in regione nostra insula quaedam prope littus sita est, ad quam dum aestuat mare, lintre, aqua vero recedente, pedibus transire possumus. Variis nutrimentis esu licitis, quae igitur adtingere haud dubites, ea valde abundat; arbores silvaticae fructus, mare piscium copiam, et silvae animalia praebent venatui idonea. Illuc nobis, si tibi videtur, est secedendum, ubi, Dei cultui devoti et esu licitis nutriti, ad mortem usque vitam transigamus tranquillam." Quibus dictis Ab'd allah ben Jasin adnuens, "istud," inquit, "consilium mihi quoque optimum videtur. Agedum, nomine Dei ter optimi maximi rite invocato, insulam sine mora intremus." Ambo igitur, septem e nobilissimis tribûs Gedâlae viris comitantibus, insulam occuparunt, ubi

monasterio exstructo, spatium trium mensium, Dei cultui unice addicti una cum sociis vixerunt. — Fama vero hujus rei mox evulgata, quum homines intelligerent, eos vitam aeternam quaerere et in id studere, ut ignem (Gehennae) effugerent; multi resipiscentes ad eos se receperunt, et numerus adcurrentium in dies adcrevit. Jahia ben Jasin statim hos instituere coepit. Korano praelecto, animos ad virtutem inclinavit, proemia divina adfectandi poenamque ignis dolorosam effugiendi cupidos fecit, donec tandem amor erga eum in cordibus eorum invaluerit. Quem successum habuerit opera illa, inde maxime efficitur, quod tantus brevi adcurrit discipulorum numerus, ut fere mille nobilissimorum gentis Sanhâdjae comprehenderet. Quum ad monasterium ejus hi omnes sese continerent, iis nomen *Murabitun* dedit [6]). Korano et Sunnâ expositis, lavacris et precibus solemnibus, eleemosyna ceterisque Dei praeceptis iis rite injunctis, concionatoris partes agere incipiens A'bd allah, jam praemia divina exposuit, jam ignem Gehennae minatus est, jam timorem Dei inculcavit, jam praedicatoris partes unicuique obeundas monstravit, quibus si quis rite functus fuerit, summis praemiis a Deo foret exornandus. Denique ad eos, qui e tribubus Sanhâdjae verae religioni adversarentur, sacro bello petendos sic Mu-

rabitos excitavit. "Vos," inquit, "concilium Murabitorum, magnam jam esse multitudinem sciatis, quae principes gentis vestrae et tribus duces continet. Deus jam vobis adeo benefecit, ut in viam rectam vos dirigeret. Itaque vestrum est, pro tanta gratia grates rite persolvere, id quod melius fieri non potest, quam si officium praedicantis apud homines rudes strenue administretis, et pro fide muslimica acerrime pugnetis." "Nobis modo impera, Doctor benedicte", illi responderunt, "quidquid tibi placuerit; nos dicto adeo audientes invenies, ut, si patrem matremve occidi jusseris, jussa haud mora exsequamur." Tum ille, "exite ergo, et, quod bene vertat, populum vestrum commonefacite, terrorem poenæ iis incutientes et testimonium Dei ad eos perferentes. Si resipuerint et, vitiis, quæ apud eos invaluerunt, relictis, ad bonam frugem redierint, eos mittite. Sin recusent quæ jusseritis facere, et, in errore suo permanentes, rebellioni contra Deum pertinaciter adhæserint, Dei auxilium adversus eos invocabimus et, donec Is, qui optimus est judex, nos inter dijudicaverit, utri parti victoria detur, eos strenue debellabimus." Quibus dictis Murabiti parentes, singuli ad gentem suam reverterunt, ibique homines sedulo monuerunt et hortati sunt, ne ea, quæ legi divinæ contraria essent, ulterius committerent.

Sed nemo vocationi huic paruit, vel ullam ostendit poenitentiam. His auditis, A'bd allah ben Jasin ipse iter ad eos instituit, et, principibus tribuum earumque ducibus convocatis, testimonium Dei prælegit, eosque de resipiscentia adpellans, supplicium præfractos manens intentavit. Postquam septem dies, tanta enim erat ejus clementia, monendo ita continuaverat, neminem vero ad verba sua animum adtendentem, sed potius in pejus indies ruentem invenerat; omnia mitioris generis tentamina vana esse intelligens, a minis et hortationibus fatigatus destitit. Aliam viam ingrediendam jam statuit, et comites sic adlocutus „nihil", inquit, „negleximus, quod ad hanc gentem convertendam sufficeret: testimonium Dei iis detulimus, et monita et minas abundanter adhibuimus. At nequidquam operam dedimus. Nil amplius restat, nisi bellum, quod, benedictione divina adjuti, contra eos feliciter, ut spero, geremus." Primam, quam adgrediebatur A'bd allah tribum Gedâlam, ter mille Murabitorum armatorum manu instructus, fugavit et magnam fugientium edidit stragem; reliquis, qui Islamismum denuo profitebantur, conditio bona facta est, et ii omnia quae injungebantur officia strenue persolverunt. Hae res mense Sefer Anno CCCCXXXIV (p. Chr. n. Septembr. MXLII) gestae sunt. Deinde Lemtûnam adortus est, quam, donec eam subjugaret, acriter

impugnavit. Caesa tandem et fugata A'bd allaho ea quoque sese subjecit, poenitentiam vitae anteactae palam professa. Ea conditione in fidem eam accepit A'bd allah, ut Koranum et Sunnam sancte observaret. Jam Mesûfam bello petiit, quae, eadem passa, easdem leges sibi imponi ferre coacta est, ac antea Lemtûna et Gedâla. Ceterae Sanhâdjae tribus quum viderent, quanta fortuna Murabitorum arma prosequeretur, summam prae se tulerunt poenitentiam, et fidem atque obedientiam perfectam præstiterunt. Hominibus, qui itaque resipiscentes ad A'bd allahum convenerunt, primum omnium centum plagas, eos purificandi caussa, scutica incussit, et deinde iis ita purificatis Koranum et præcepta Islamismi exposuit. Præter preces, e ritu muslimico observandas, devictis tributum etiam imperavit, quod nomine eleemosynæ omnisque proventûs decimarum quotannis erat pendendum. Eam ob caussam thesaurum instituit publicum, in quem omne conferrent tributum, unde mox copiis suis jumenta et arma conquirere coepit. Eodem successu gentes, quæ nondum erant subjugatæ, Berberorum deinceps invasit, ita ut totam Deserti regionem una cum incolis ejus universis suo subjiceret imperio. Spolia in tot ac tantis bellis cæsorum collecta Murabitis praedam dispertiit. Magnam partem decimarum, eleemosynae et tributi, partis quintae nomine no-

ti, in terram misit Mesmâdae, ut illius regionis doctorum discipuli et judices inde caperent aliquam utilitatem. Fama Murabitorum per universum Desertum, regiones Afrikae meridionales, terram Mesmâdae et reliquum Meghreb longe lateque brevi diffusa est. Narrabant ubique, virum inter Gedalenses exstitisse, qui homines ad Deum et viâ rectâ incedendum vocaret. Eum secundum Korani effata jus dicere. Nihilominus summae esse modestiae et temperantiae. Haec omnia inde in terras Nigritarum etiam propagata sunt.

Mortuo Jahia ben Ibrahim Gedalensi, alium Murabitis praeficere voluit A'bd allah, quem in bellis ducem praecipue haberent. Quum tribus Lemtûna prae ceteris Sanhâdjae tribubus obedientiam erga Deum, pietatem summam moresque legi divinae consentaneos semper ostendisset, ideoque tantam gratiam apud A'bd allahum iniisset, ut eam aliis gentibus praeferret et maximo adficeret honore, non diu haesitavit ille, unde virum quaereret huic loco idoneum. Si consideraveris, Deum jam decrevisse, Lemtûnam gentem mox omnem Meghreb et Hispaniam esse occupaturam; A'bd allahum, Lemtûnam aliis antehabendo nihil aliud egisse facile invenies, quam ut Dei decretum exsequeretur. Convocatis igitur tribuum Sanhâdjae principi-

bus, *Jahiam ben O'mar Lemtunensem* praefecit, et Emirum in universos renuntiavit. Sed quamvis Jahia ben O'mar ita titulum emiri et ducis speciem portaret, A'bd allah tamen regis partes ipse sustinuit, quia solus jussit et vetuit, dona dedit et accepit. Praefecturâ tantum militari Jahiae concessâ, ipse omnia, quae religionem vel judicium exercendum spectarent, sibi reservavit et tributum quintae decimaeque partis percepit.

## Historia Emiri Jahiæ ben O'mar ben Telakakin Sanhadjitæ e Lemtûna oriundi.

Abu Zakaria Jahiae ben O'mar Lemtunensi Murabito, qui vir fuit magnæ pietatis, excellentis ingenii, neque minus abstinentiæ, temperantiæ et integritatis laude ornatus, universis Murabitis ita praefecto, officium sacri belli adversus infideles A'bd allah praecipue injunxit. Huic ille adeo fuit submissus, ut in omnibus, sive aliquid juberet, sive vetaret, simpliciter ei morem gereret. Cujus rei unum idque evidentissum exemplum adferre placet. Aliquando ei A'bd allah, „tibi," inquit, „o Jahia, correctione opus est." Jahia, „quamobrem", respondit „ita sentias, mihi explices rogo." „Caussam" inquit A'bd allah, „non

ante tecum communicabo, quam a me fueris correctus.“ Et simul cum dictis posticis ejus partibus denudatis viginti plagas scuticâ inflixit. Quo facto „Ideo“ dixit A'bd allah „te verberavi, quod tu, quî dux sis exercitûs, pugnam obire et pugnantibus te immiscere solitus es. Scias enim, hoc esse maximum in imperatore vitium, qui numquam manus conserere ipse debet, sed, suo loco manens, milites tantum incitare et confirmare animos dejectos. Vita ducis, exercitus vita; et si acciderit, ut moriatur ille, copiae etiam caedentur.“

Totam Deserti regionem Jahia jam occupavit, belloque in fines Nigritarum deinde translato, horum etiam terrae magna parte potitus est. Aliam arma proferendi occasionem mox nactus est. Nam anno CCCCXLVII (p. Chr. n. $\mathrm{ML}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{VI}}$) Jurisconsulti virique sancti, qui Sidjilmâsam et Dera'm ac regiones his urbibus propinquas habitabant, in unum convenerunt, et litteris ad A'bd allahum ben Jasin et Jahiam ben O'mar nec non principes Murabitorum datis, eos in terram suam evocarunt, opem eorum implorantes contra foedissima, quae ibi perpetrabantur, injustitiae et violentiae facinora. Inprimis Mesu'dii ben Vanudin Zenatensis, e gente Mughrâva oriundi, regis tyrannidem adcu-

sarunt, qui viros doctos atque religiosos et ceteros Muslimos omni generi opprobrii, ignominiae et injuriae continue exposuit. A'bd allah ben Jasin, epistola ei adlata, principes convocavit Murabitorum, quos, postquam eam recitaverat, consuluit, quid agendum esse censerent. Quae ab iis petiverant Jurisconsulti, ea maximae esse necessitatis, unanimi consensu responderunt, et iis officiis, quae et omnibus Murabitis et ipsi duci erant imperata, adnumeranda. Quare cum rogarunt, vellet exercitum, divinae commendatum tutelae, se duce in certamen educere. Bello igitur indicto, vigesima die mensis Sefer anno CCCCXLVII (p. Chr. n. die XVII Maji MLV) cum magno Murabitorum exercitu Der'am profectus est, ubi praefectum Mesu'dii Mughravensis, regis Sidjilmâsae, oppressum ex urbe ejecit; quinquaginta quoque millia camelorum, in pascuis circa urbem pascentium, qui eidem Mesu'dio erant, fortuna adjutus praedam cepit. Quae omnia quum ad Mesu'dium essent perlata, copias haud mora coëgit et in pugnam duxit. Agmina concurrunt; diu vehementer pugnatum est. Victoriam tandem Deus ter optimus maximus Murabitis concessit. Mesu'di ipse in proelio occiditur et cum eo major exercitûs pars cadit; reliqui terga vertunt. Praedam ingentem bonorum, jumentorum armorumque captam in unum

cum camelis ad Dera'm raptis collatam, postquam ex ea quintam partem, Jurisconsultis sanctisque viris Sidjilmâsae et Derae' destinatam, exemerat Murabitis omnino distribuit A'bd allah, et castris motis, statim Sidjilmâsam tetendit. Omnibus, quos in urbe invenit, Mughravensibus ferro exstinctis, ut militibus quietem aliquam redderet remque publicam hujus regionis in bonum redigeret ordinem, aliquamdiu ibi commoratus est. Omnia, quae legi divinae contraria deprehenderat, heic mutavit: instrumenta musica confringebat, cauponas cremabat, et tributum omne aut vectigal novum contra jus exactum antiquabat. Neque aliud quidquam, quam quod Koranus et Sunna juberent, constare passus est. His omnibus bene peractis et Lemtunensi quodam urbi praefecto, inde A'bd allah in Desertum abiit.

Abu Zakaria Jahia ben O'mar, dum adversus Nigritas pugnabat, in pugna, mense Muhharremi anno CCCCXLVIII (p. Chr. n. MLVI) morte occubuit, cujus in locum fratrem Abu Becrum ben O'mar Lemtunensem A'bd allah ben Jasin suffecit.

## Historia regni Abu Becri ben O'mar Lemtunensis, ducis Murabitorum.

Mortuo Jahia ben O'mar, fratrem, ut ante dictum est, Abu Becrum ben O'mar, qui vir fuit pius et valde abstinens, A'bd allah ben Jasin suffecit atque munus belli gerendi tradidit. Murabitos ille instigavit, ut terram tribûs Mesmâdæ et Belad el Sus adgrederentur, et maximis instructus copiis, mense Rebi' secundo, anno CCCCXLVIII (p. Chr. nat. mense Junii MLVI) profectus est. Patruele suo, Jusufo ben Teschfin, primo agmini præfecto, Abu Becr ad Belad el Sus usque progressus, regiones Guzûlæ invasit, et urbibus Massa et Tarudant captis, omnem terram Sus occupavit. Tarudanti sedem fixerant homines Rafeditæ, qui ex nomine viri cujusdam, sectæ eorum auctoris, A'lii ben A'bd allah Bedjilensis, Bedjilenses sese vocarunt. Qui A'li, dum O'beid allah Schii'ta in Afrika imperium gessit, Sus petierat, ubi falsa ista doctrina late sese propagavit. Post ejus mortem ætates sequentes jure quasi hereditario errores istos acceperunt, et nihil justum, nisi quod ipsi putarent, umquam habuerunt. Tanta vi eos jam adorti sunt Abu Becr et A'bd allah ben Jasin, ut urbem ceperint, et magnum Rafeditarum numerum occide-

rint. Reliqui ad veram fidem reverterunt; opes cæsorum prædam Murabitis A'bd allah dedit. Ita Deus potentiam Murabitorum conspicuam reddidit et evexit potestatem; omnia castella in Belad el Sus sita expugnarunt, et universas hujus regionis tribus suo subjecerunt imperio. Præfectos in propinquas provincias A'bd allah ben Jasin delegavit, quibus imperavit, justitiam ibi tueri, legem prophetæ indicere, et eleemosynam decimasque percipere, omne autem novum tributum contra legem exactum, antiquare. Deinde castris motis in regiones Mesmâdæ copias duxit, montes Deren et terram Reudæ occupavit ac Schafschâvam urbem vi cepit. Nefis ceterisque Gedmuiæ regionibus imperio adjectis, tribus Regrâgæ el Hhahhæ ad eum, ut sacramentum dicerent, suâ sponte devenerunt. Urbem Aghmât, quam Lekût ben Jusuf ben A'li Mughravensis tenebat, jam petiit eamque obsidione cinxit. Lekût et obsidione pressus et pugnis continuis exhaustus quum videret, se nullam tanto impetui resistendi potentiam habere, urbe tradita, clam noctu fugâ salutem quærens, cum universa sua familia in regionem Tadilæ festinavit. Eam hoc tempore Benu Jefrun occupaverant, et fidei eorum ille se jam totum commisit. Murabiti autem urbem relictam intrarunt. Quæ res anno CCCCXLIX (p.

Chr. n. ML$\frac{\text{VII}}{\text{VIII}}$) gestæ sunt. Ut exercitus vires reficeret, A'bd allah ben Jasin duos fere menses in hac urbe substitit. Tadilam jam adgressus est; urbe capta, omnes Beni Jefrun ibi inventos trucidavit. Lekût etiam captum neci tradidit. Inde regionem Tamesnæ invasit, et eadem usus fortuna eam statim occupavit. Dum heic mansit, nuntius ei datur, varias Berghuâtæ tribus valde numerosas, cultui idolorum et erroribus nefandis addictas, oras hujus terræ maritimas habitare. Quæ res novam belli proferendi caussam ei præbuit.

## Historia belli, contra paganos e tribu Berghuâta ab A'bd allaho ben Jasin gesti, hujusque sectæ stultissimæ et cultûs ignobilis descriptio.

Abu A'bd allaho, Tamesnam quum advenisset, nuntiatum est, populum innumerum tribuum, quibus nomen erat commune Berghuâta, has oras maritimas incolere; eos idololatriæ addictos, erroribus foedissimis immersos, infidelitati tenaciter adhærere. Tribus esse, quæ, quamvis idem haberent nomen, cognatione non ita essent conjunctæ, ut ad unum patrem matremque unam referrent origi-

nem; sed ex diversis et inter se mixtis populis berberici generis plures familias Salihho ben Tarif sese conjunxisse. Eum fuisse virum, qui, regnante Hheschâmo ben A'bd el Melic ben Mervân, prophetam se jactitans Tamesnæ sedem fixerat. Quum e Bernât, castello prope Sidoniam in Hispania sito, originem duceret, adseclas ejus se primum Bernatenses adpellasse; postea vero Arabes, nomine ad linguæ suæ genium reficto, eos Berghuatenses dixisse. Talem denominationis caussam fuisse narraverunt. De ipso Salihho ben Tarif hæc habemus. Parentibus judaicis, e tribu Simeonis filii Jakubi, natus, semper morum turpitudine fuit notatus. Postquam in castello Bernat prima eruditionis rudimenta acceperat, iter ad orientem suscepit, ibique apud O'beid allahum, qui doctrinas Mu'tazilitarum Kadaritarum [7]) profitebatur, litteras didicit, et in Magia inprimis operam suam collocans, ejus scientiæ varia genera ab eo obtinuit. Ad occidentem reversus et sede prope Tamesnam fixa, tribubus Berberorum, quas omnino rudes heic offendit, Islamismum, a rebus illicitis abstinentiam et pietatem ita exponere coepit, ut in animos hominum alte penetrans, quum aliis incantamentis, tum eloquentiæ vi eos ad se adliceret. Sermonibus fucatis et orationibus versatilibus deceptos adeo seduxit, ut virtuti ejus simpliciter

confidentes conjunctionem cum Deo proximam in eo agnoverint. Quare commoti cum sibi præfecerunt nec ullam rem, nisi quum consilium ejus ante audivissent, unquam peregerunt, sed nutu illius sive jubentis sive vetantis, omnia gesta sunt. Hinc tantam ille concepit arrogantiam, ut munus propheticum sibi vindicare et nomen Salihh el Mumenin recipere ausus sit, dictitans: ego ille Salihh sum, de quo Deus in libro ad Muhhamedem demisso loquitur [8]). Doctrinam, quam veram religionem iis colendam proposuit ab eo acceperunt. Et hæc anno CXXV (p. Chr. n. DCCXLIII) facta sunt. Capita hujus erroris præcipua hæc fuerunt. Primum omnium, ut cum prophetam crederent, jussit. Jejunium solenne mense Redjeb erat observandum, mense autem Ramedhani edendum; numerum precum ad decem evexit, singulis diebus peragendas, quarum quinque noctu, et interdiu quinque erant dicendæ. Cuique fideli sacrificium solenne quaque prima et vigesima Muhharremi die erat faciendum. In ablutionibus etiam ritum mutavit, umbilicum et latera lavanda indicens. Preces eorum vitiosæ sunt, quum precantes non adorent; sed in fine cujusque Rekæ' (corporis inclinationis) caput quinquies ad terram inclinant. Quando cibum aut potum sumerent, *no-*

*mine Jakes*[9]) eos clamare jussit, quam vocem *nomine Dei* significare creditur. Decimas e fructibus omnis generis erant pendendæ. Viro tot ducere uxores, quot illi placuerint, neptibus tamen omnino exceptis, licuit. Neque lege fuit defensum, quin uxorem repudiaret vel repudiatam ad se reciperet, quotiescumque vellet maritus, etiamsi millies eodem die id repeteret; neque femina menstruis laborans iis fuit interdicta. Furem, ubi primum inveniretur, occidi jussit, autumans, nil, nisi mortem peccatum ejus expiare posse. Sanguinis lytrum bobus esse pendendum statuit. Caput animalis cujuscumque tamquam foedum, et gallinas, tamquam rem abominandam, edere vetuit: galli enim cantu horas suas definiunt, ideoque eum mactare et edere æque improbum habendum; si quis contra fecerit, servum manumittere, criminis luendi caussa, tenebitur. Sputum dominorum lingere benedictionis inde captandæ caussa, iis imperavit. Ipse manus eorum conspuit, quas eandem ob rem linxerunt et sputum ad ægrotos quoque portarunt, ut eo sumto ad sanitatem redirent. Koranum denique divinitus inspiratum et a Deo ter optimo maximo ad se demissum iis proposuit, quo in precibus recitandis uterentur quemque in templis explicarent; cui si quis fidem denegaverit, infidelis esset habendus. In octoginta capita hunc

diviserat Koranum, et ea nominibus prophetarum inscripserat; c. c. hæc adferam: Suram Adami, Suram Noæ, Suram Jobi, Suram Jonæ, Suram Mosis, Suram Aronis, Suram tribuum duodecim, Suram Pharaonis, Suram filiorum Israëlis, Suram galli, Suram cameli, Suram locustæ, Suram Haruti et Maruti, Suram Iblisi, Suram judicii extremi, Suram miraculorum mundi. In hoc libro summa scientia, ut crediderunt, posita est. Post pollutionem ablutionem haud necessariam judicavit, sed tantum si ea crimini fuerit conjuncta. — Si quis cupiverit expositionem absolutam de Berghuâta ejusque regibus, eam in libro nostro majore, *Flos horti de historia temporis et narratio de rebus, quæ exstiterunt*, inscripto inveniet.

Quæ omnia quum audivisset A'bd allah ben Jasin, conditionem Berghuâtæ, ob errores quos amplexa fuerat nefandos, periculi plenam judicans, eam præ ceteris tribubus adgredi necessarium duxit et cum exercitu Murabitorum eo profectus est. Hoc tempore dux Berghuâtæ fuit Abu Hhafs ben A'bd allah ben Abi Ansâri ben Abi O'beid Muhhamed ben Mukallid ben Eljesa' ben Salihh ben Tarif Berghuatensis (qui idem fuit Salihh ac ille, qui, prophetam sese jactitans, originem sectæ dederat). Certaminibus magnæ stragis pugnisque cruentis inter hunc ducem et A'bd alla-

hum ben Jasin editis, in quibus ex utraque parte multi sunt occisi, A'bd allah tandem ipse Murabitorum director et caput, vulneribus gravis, pro religione pugnans, mortem occubuit gloriosam. Quem quum ad castra transferrent, spiritum vitæ adhuc superstitem in eo invenerunt; et senioribus principibusque Murabitorum convocatis sic vale dixit: "Qui vester, concilium Murabitorum," inquit, "status jam sit bene perpendite. Vos in terra hostium estis, et ego quidem hoc ipso die certo certius moriar. Ne igitur animos despondeatis, neque ignavos vos præbeatis, quæso, strenue cavete. Sic enim fieri potest, ut imperium vestrum et bona, qua adhuc usi estis, fortuna abeat. Conjunctione vero intima vos invicem consociate, ad auxilium veritati ferendum semper paratos, et fratrum more sincerorum in Deo unitos. In primis ut omnem dissensionem et invidiam propter summæ auctoritatis adfectationem evitetis, vos oro atque obsecro: vanæ enim sunt istæ discordiæ, quia "Deus regno pro lubitu suo hominem donat, eumque, quem e servis suis maxime amat, vicarium suum in terra constituit." Quum statim a vobis discessero, circumspicite etiam, quem vestrum vobis præficiatis idoneum, qui exercitum ducat, hostes vestros bello strenue persequatur, prædam ex æquo vos inter dividat et eleemosynas decimasque

rite percipiat." Unanimi consensu Abu Becrum ben O'mar Lemtunensem hoc belli munere dignum Murabiti declararunt, quem itaque A'bd allah ben Jasin, omnibus Sanhâdjæ principibus rem adprobantibus, ducem eorum renuntiavit. Vespertina ejusdem diei hora, quæ dies erat solis et vigesima quarta mensis Djumâdæ primi anno CCCCLI (p. Chr. nat. IV Novembr. MLIX) A'bd allah ben Jasin mortuus est et loco Tamesnæ sito Kerifla adpellato sepultus, ubi super sepulcrum templum ædificarunt.

Fuit ille A'bd allah ben Jasin eximiæ abstinentiæ, sive cibum sive potum respexeris. Omni, quo inter Murabitos vixerat, tempore numquam carnem ederat nec lac biberat; nam pecora eorum, propter summam populi ignorantiam fastidium ei moverant. Sed venatio nutrimentum illi præbuit. Alio vero respectu parum temperantiæ præ se tulit. Tantum enim libidini indulsit, ut mense unoquoque plures duceret feminas et dimitteret, nec prius fama pulchræ puellæ ad eum pervenerat, quam eam in matrimonium peteret; in dote vero pendenda numquam quatuor Mithkal excessit. Ex opibus mixtis tertiam retinuit partem, quod, ut dicebat, jurisconsulto licuit. — Exempla quædam, testimoniis spectatorum comprobata quum hujus

viri præstantiæ eximiæ, tum sanctitatis et benedictionis, quam preces illius effecerunt, jam proferamus. Murabiti, narrant, quum aliquando, ut Nigritas infideles bello sacro peterent, cum eo exiissent, ob aquæ penuriam siti pæne perierunt. Præsto autem fuit A'bd allah ben Jasin et, postquam ablutionem sacram pulvere peregerat, duas Reka's precatus, a Deo ter optimo maximo auxilium imploravit. Quia precibus ejus maxime confidebant homines, animos eorum statim placavit et finita imploratione jussit, terram eo loco, ubi preces fuderat, effodi. Quo facto, spithamæ intervallo, aquam dulcem et frigidam invenerunt, qua et sitim exstinxerunt et utres replerunt. Aliud sanctitatis summae indicium fuit, quod ranae circa eum consistere numquam potuerint, nisi coaxatione et strepitu intermisso. Quare, ubi A'bd allah ad locum, in quo ranae delitescebant, propius accessit, statim conticuerunt; quando autem inde ille abiit, illico coaxtionem instaurarunt. Inde a primo tempore, quo has regiones intraverat A'bd allah, ad mortem usque jejunium strictissime observare numquam desierat. Magnam ideo gubernatio illius harum gentium meretur laudem, quod apud eas et Sunnam et sextae hebdomadis diei observationem brevi introduxit; quibus officiis ut melius satisfacerent, poenas unicuique, qui contra fecerit, ita statuit, ut is, qui diei sextae preces celebrare intermisisset, vigin-

ti, qui vero Reka'm unam in his precibus dicendis omisisset, quinque plagis scuticâ caedendus esset.

## Historia regni Emiri Abu becri ben O'mar Sanhadjitae e gente Lemtûna oriundi.

Emirus Abu Becr ben O'mar ben Telacakin ben Vajaktin Lemtunensis e gente Muhammedija dicta, matrem habuit liberam Gedalensem, cui nomen fuit Safija. Quem quum A'bd allah ben Jasin Murabitis præfecisset, primum Sanhâdja et deinde aliæ Murabitorum tribus sacramentum ei dixerunt, et ita in regno stabilitus est. Prima ejus cura fuit in A'bd allaho rite sepeliendo; qua functus exercitum disposuit et, in omnibus rebus divino confidens auxilio, summa virium contentione Berghuâtam ita adgressus est, ut hunc populum plane eradicaret. Fugientes persecutus magnam edidit stragem multosque duxit captivos, et victor rediit. Berghuâta quoquo versus dissipata se ei subjicere cupiens, denuo fidem Muslimicam professa est; neque his temporibus vestigium erroris hujus nefandi inveniri potest. Opibus devictorum et pecudibus collectis et inter Murabitos divisis, ad urbem Aghmât Abu Beer revertit et heic ad mensem Sefer anni CCCCLII (p. Chr. nat.

Februar. — Mart. MLX) constitit. Copiis fere innumeris e tribubus Sanhâdja, Guzûla et Mesmâda collectis ad occidentem perrexit, ibique, post terram Fezâz occupatam ejusque regiones montanas expugnatas, ceteros quoque tractus Zenâtæ atque urbes Miknâsæ in suam redegit potestatem. Inde contra urbem Levâtæ se convertit, quam corona cinctam mox vi cepit. Multi Benu Jefrun heic occisi sunt. Ultima die mensis Rebiæ' secundi anno jam dicto urbem intravit Abu Becr adeoque vastavit, ut numquam ex illa clade sese erigeret; ad nostra enim usque tempora inculta et deserta jacet. Terra Levâtæ ita occupata, iterum ad urbem Aghmât rediit. Uxorem heic duxerat filiam Ishhaki Hevvaritæ mercatoris cujusdam Keirevano oriundi, Zeineb cognominatam, quæ femina fuit magnæ intelligentiæ animique prudentiæ, neque minus habuit consilii, rationis ac sagacitatis et rerum gerendarum scientiæ; quam ob caussam *Incantatrix* vulgo adpellata est. Tres circiter menses apud eam jam Abu Becr degit, donec e regione meridionali nuntius ad eum perveniret, exponens quam miser et confusus status esset Deserti. Emirus, qui vir fuit probus et Dei cultui intime addictus, cædem fidelium et sanguinis effusionem inultam ferre non potuit, sed in Desertum profisisci, ut res ejus in ordinem cogeret et Ni-

gritas fidei Muslimicæ alienos bello invaderet, statim decrevit. Quum vero in eo esset, ut iter ingrederetur, Zeineb uxorem primum dimisit et discessurus eam sic adlocutus est. "Te, o Zeineb" inquit "mihi videnti tanta supereminente pulchritudine et venustate præditam, animum subit, quod forsan in itinere ad Desertum jam suscipiendo et in bello contra hostes Dei sustinendo, Deus mihi præfiniverit, vitam morte præclara commutare præmioque felicitatis fidelibus proposito amplissimo ita frui. Ceterum tua corporis crassities labores ejusmodi itineris in illis regionibus molestioris tentare te vetat. Quam ob caussam te jam dimitto. At rogo velis, tempore lege constituto finito, Jusufo ben Taschfin patrueli meo nubere, quem vicarium meum in Meghreb constituo." Uxore ita repudiata, urbem Aghmât relinquit et regione Tadila peragrata, Sidjilmâsam venit, ubi aliquot dies, reipublicæ ordinandæ caussa, substitit. Castra inde moturus Abu Becr, Jusufum ben Taschfin patruelem ad se vocatum imperatorem totius Meghrebi creavit et arbitrio ejus regnum suum commisit. Conventum est, ut Jusuf, ad Mughrâvam, Beni Jefrun, tribus Berberorum et Zenatæ debellandas, reverteretur. Principes Murabitorum, quum quæ in Jusufo inhabitabant virtutes, optime cognoscerent, agendi rationi.

Abu Becri consenserunt. Jusuf enim pietate, animi excellentia, fortitudine, mente constante et animosa excelluit, neque justitiæ, temperantiæ firmique consilii laude, nec felicis ingenii acumine caruit. Hic igitur cum dimidio Murabitorum exercitu Meghreb petiit, Abu Becr autem ben O'mar ceteras copias in Desertum duxit, mense Dhu'l Ka'da anno CCCCLIII (p. Chr. nat. Novembr. MLXI). Deinde Zeineb uxorem duxit Jusuf et ea regnum administravit omnesque res pulcherrima gubernandi ratione ita ad mortem usque, anno CCCCLXIV (p. Chr. n. MLXX$\frac{I}{II}$), gessit, ut major Meghrebi pars potestati Jusufi subjiceretur.

Emirus Abu Becr in Desertum profectus, tranquillitatem terræ restituit et res omnes in bonum redegit ordinem. Multis copiis conscriptis, deinde regiones Nigritarum adgressus, ea fortuna usus est, ut terram in trium mensium itineris longitudinem porrectam brevi occuparet. — Interea Jusuf ben Taschfin vitam inertem non egit. Maxima enim Meghrebi parte expugnata, imperium suum ibi stabiliverat. Quæ quum audivisset Abu Becr, vastitatem imperii, quod sibi paraverat Jusuf in Meghreb, metu conspiciens, eum prævertere consultum habuit et e Deserto exiens, ut Jusufum ex imperio tolleret aliumque

in ejus locum sufficeret, propius accessit. Fama vero adventûs Abu Becri mox ad Jusufum perlata est, et consilio de ea re cum uxore habito, ea hanc viam ingrediendam censuit. "Patruelem tuum," inquit "hominem probum mitisque ingenii et a sanguine effundendo maxime abhorrentem esse, optime tibi notum est. Quum igitur obviam ei iveris, primum omnium honoris et submissionis omitte speciem, cui ante fuerit adsuetus. Sed, quasi ejus æqualis vel adversarius esses, te potius contumacem præbeas. Nihilominus tamen muneribus varii generis, sicut pecoribus, palliis, vestibus, edulibus et tentoriis coriaceis tecum adlatis, comitatem erga eum monstrare haud a re erit. Hæc enim omnia summi ille æstimabit, utpote qui vitam in deserto agat, ubi quæcumque a nobis advenerint res, raræ et caræ necessario habeantur." Consilio Zeinebi comprobato, quum Abu Becr ben O'mar a provincia Jusufi non multum abesset, hic illi obviam profectus est et in via uterque congressi sunt. Jusuf Emirum salutaturus, non, ut mos fert, ex equo descendit, sed eo vectus, omnibus omissis ambagibus, salutem dixit. Numeroso, quo erat stipatus Jusuf, exercitu viso, Abu Becr eum interrogavit, quid sibi vellent tantæ copiæ. "Auxilio," respondit Jusuf, "mihi erunt adversus omnes, qui me hostiliter adgressi

fuerint." Et hocce responsum et salutandi modus parum submissus suspensum tenuit Abu Becrum, quid de consiliis Jusufi crederet. Deinde mille jumentis onustis, quæ adpropinquabant, conspectis, iterum quæsivit, quid significarent isti cameli. "Ad te, O Emire," ille dixit "equidem venio dona, quæ vides, adferens, pecudes, vestes, edulia et pelles, quibus contra deserti inopiam te defendas." His dictis omnino persuasus est Abu Becr, Jusufum nullo modo separationem intendere, et, "O Jusufe," ei dixit, "ex equo descendas; nam animus me movet, te ex testamento heredem meum constituere." Postquam ambo descenderant, et stragulo subjecto consederant, Abu Becr sic Jusufum adlocutus est. "Imperium hocce jam tibi committo, quod meæ curæ huc usque traditum fuit et de quo coram Deo olim ratio est a me reddenda. At memento, Deum in omnibus quæ ad fideles spectant, vereri; ut, præceptis Ejus satis faciens, meam et tuam ipsius animam salvam facias. Neque ullam subditorum rem perdas, memoria bene tenens, te Deo rationem actorum reddere debere. Deum ter optimum maximum ferventissime oro, ut te integrum servet, viribus instruat idoneis et ad res tuas bene peragendas justitiamque erga subditos rite exercendam secundet; nam Is, respectu et ad te et ad illos habito, ve-

rus meus vicarius erit." Simul cum dictis Jusufo vale dixit et in desertum reversus est, ubi Nigritas infideles debellando continue intentus, imperium ad Montes auri in horum regione extendit et vitam egit longam, donec mense Scha'ban anno CCCCLXXX (p. Chr. nat. Octob. MLXXXVIII) in pugna quadam sagitta saucius venenata, mortem pro religione occumberet gloriosam. Abu Becro mortuo, res omnis Jusufo ben Taschfin cessit.

# ADNOTATIONES.

1) Cod. Musei Britannici fol. XC. Veli el din Abu Zeid A'bd el Rahhmân ibn Schems el din Abu A'bd allah ibn Khaldûn Hhadhremi, Tunesi natus est prima die mensis Ramadhâni anno DCCXXXII (p. Chr. nat. VI Maji MCCCXXXII), et, post varia fata, quum munus summi judicis Kahiræ tertium susciperet, ibi die XXV mensis Ramadhâni anno DCCCVIII (p. Chr. nat. XVI Jun. MCCCCV) obiit. Cfr. in primis *S. de Sacy*, Chrest. Arabe, ed. 2:dæ Tom. I. p. 390 et sqq.

2) Vid. *Journal de Savans*, 1838, Julii mensis vol., articulum, qui inscribitur: *Observations sur les Numides, par E. Quatremère.*

3) Schehâb el din Ahhmed el Mukri Fezanus, qui librum كتاب الجمان فى مختصر اخبار الزمان i. e. *Liber Margaritarum de compendio Historiæ temporum* inscriptum circa annum DCCCLVII (p. Chr. n. MDL) composuit, Historiam universalem narraturus, multa quoque de Berberis adtulit, ad quæ infra recurremus, Manuscriptum Regiæ Bibl. Parisiensis N:o DCXVI signatum usurpantes. Cfr. de hoc libro, quæ dedit *S. de Sacy* in secundo volumine operis: *Notices et Extraits de Manuscrits* cet. pag. 124 et sqq.

4) *Hhadji Khalfa* (ed. Flügel. N:o 1458) hæc tantum habet. الانيس المطرب وروض القرطاس فى اخبار المغرب وتاريخ مدينة فاس لعلى بن محمد بن عمر بن ابى زرع الفه لابى سعيد بن المظفر قبل سنه ٧٣٦. Ad aliud Nostri opus, quod in fragmento hocce etiam pag. 353 citatur, hæc idem notavit: زهرة البستان فى اخبار الزمان لعلى بن احمد ابى زرع. (Ms. arab. Bibl. Regiæ Parisiensis N:o DCCCLXXV).

5) Hoc nomen in codicibus variis variat: L. بن يامين, P. يومر Ch. et Ibn Khaldûn تومرت, *Moura:* Tumar, *Dombay:* Tumert, quibus etiam accedit compendium Lexici Geographici (مراصد الاطلاع Ms. Arab. Bibl. Reg. Paris.), ubi hæc leguntur: المصامدة نسبه الى مصمودة وهى قبيلة

بالمغرب كالمهلابه وهو موضع يعرف بهم بالمغرب منهم كان بن التومرت المستولى على بلاد المغرب. Apud Ibn Khaldûnum (fol. CIII) duplex ejus genealogia occurrit. Altera secundum *Ibn Reschîk* (ابن رشيق) et *Ibn El-ketân* (ابن القطان): محمد بن عبد الله بن وحليل بن يامصال بن حمزة بن عيسى; altera hæc est: محمد بن تومَرْت بن نيطاوس بن سافلا ابن مسبغون بن ابكلديس بن خالد. Alii ad alium genus ejus referunt. At vera ejus origo e gentis Mesmâdæ familia *Hergha* (هرغة), tribu berberica notissima, est repetenda, quamvis se Alidam ipse fecerit. Schehab el din eum Muhhammed ben A'bd allah nominat, et hæc refert (Ms. cit. fol. CLXX). قال الغازى بن قيس اول ما دخل جد المهدى الى المغرب مع عقبة بن نافع واستوطن المغرب من حينئذ وفى الامام مهدى يقول الغازى بن قيس قبل ظهوره

هو الذى يملا جميع الارض  بالقسط والعدل بحكم الفَرْضِ

وهو بلا شكّ سليل فاطِمَهْ  وابن على ذى الاصول السالِمَهْ

يولد فى الغرب البعيد عنصرُهْ  بالاصل الفرع يطيب محضرُهْ

I. e. *Narrat Ibn Keis, expeditonum Muslemicorum scriptor, primum majorum Mehdii O'kba'm ben Nafi' in Meghreb fuisse secutum, ibique inde ab eo tempore domicilium fixisse. Idem de Mehdio ipso hæc cecinit*

*Ille, qui omnem terram æquitate et justitia, statutum Dei firmando, implevit,*

*Sine dubio e Fatima filioque A'lii, cujus stirps omni vitio caret, originem ducit.*

*In Meghrebo dissito genus ejus natum est, cujus præsentia per suam originem illustrem placet.*

Metrum Redjez est. — Cfr. quoque *S. de Sacy*, Chrest. Arabe Vol. II p. 297 ubi pro هرعى et هرعة sine dubio هرغى et هرغة legendum est.

6) *Schultzius* ille peregrinator infelix jam pridem in Annalibus Societatis Asiaticæ Parisiensis (Journal Asiatique, 2:me Série, Vol. II p.

117 sqq.) versionem dedit loci Ibn Khaldûni memorandi, ubi de variis tribuum berbericarum ramis loquitur. Doleo, me hunc tractatum ad manum nunc non habere.

7) Cura imperii Gallici, per Schultzium commonefacti, codicem Ibn Khaldûni in Bibliothecis Constantinopolitanis adhuc latentem describendum curarunt. Anno MDCCCXXXVII exemplar diu exspectatum Parisios advectum est; sed tanta incuria et, ut videtur, mala librariorum fide exscriptum, ut neque librum totum complecteretur, immo secundo volumine ex alio quodam opere adjecto, nec bene legi posset. — Eodem fere tempore aliud exemplar, utrum omnibus suis partibus absolutum haud scio, e collectione Rousseauiana proveniens, Parisiis venum datum est, cujus usum petentibus liberaliter concesserunt possessores. — Jam pridem Bibliotheca Leidensis, diligentia b. Hamakeri ac admiranda reipublicæ munificentia, VI voluminibus compositum opus Ibn Khaldûni conquisiverat; qui codex, si nihil desideratur, omnium facile princeps est habendus. — Bibliotheca Bodleïana duo exemplaria sectionis quintæ possidet, quæ apud Nicollium sub N:is CXXIV et CXXV optime recensita invenies. — Quibus codex Musei Britannici, supra commemoratus, est addendus.

8) Videas ex. c. narrationem Abulfedæ (Annall. T. III p. 150 sqq.), qui Lemtunenses Arabes facit. Cui opinioni etiam Ibn Abi Zera' favere videtur in fragmento edito, quamvis aliis libri locis semper ita de tribubus Sanhadjæ loquatur, ac si eas omnes berbericæ originis fuisse crediderit.

9) Si ad ultima verba hujus codicis (فلنرجع الى اخبار زناتة ودولهم وبكمالها يكمل الكتاب ان شاء الله تعالى) animadverteris, unum volumen, Historiam complectens tribus berbericæ maxime memorabilis Zenâtæ, heic desiderari videbis, id quod confirmatur a notitia codicis Leidensis, quam professori cl. Weyers debeo. In Tabulis genealogicis gentium berbericarum, quæ initio codicis Musei Britannici exstant, nullum occurrit nomen gentis cujusdam Zenatensis, quod, si eæ Tabulæ omnes complecterentur tribus, maxime est mirandum. Hanc vero difficultatem per Ibn Abi Zera'

expedire licet, qui, quum Historiam Merinidarum scripturus esset, genealogiam eorum posuit absolutam. Merinidæ enim ad Zenâtam pertinuerunt. Locum (in cod. U. fol. LXXIV r.) totum adponere e re duxi:

الخبر عن نسبهم الصريح ونسبهم العالى الصحيح قال المولف عفى الله عنه نقلت من تقييد الفقيه ابى على المليانى بخط يده قال بنو مرين فخذ من زناتة وهم من ولد مرين بن ورتاجن بن ماخوخ بن وجديج بن فاتن بن يدر بن يجعت (al. يجفت) بن عبد الله بن ورتيب بن المعز بن ابراهيم بن سحيج بن واسين بن يصليتن بن مسرى بن زاكيا بن ورسيج (ورسيد al. ورسيك) بن زناتة بن جانا بن يحيى بن تمزيغ (تمسيت al.) بن طريس (ضريس) وهو جالوت اول ملك البربر بن رجيج (رجيك al.) بن مادغيس الابتر بن بز (بر al.) بن قيس بن عيلان بن مضر بن نزار بن معد بن عدنان.

Zenâta igitur locum suum in Tab. II:da inter posteros Dharisæ occupare debet, cum omnibus suis tribubus, sicut Mughrâva, Beni Jefrun al.

1) De nominis derivatione et significatione hæc leguntur apud Schehâb el dinum Cod. Bibl. Reg. Par. fol. CLXII): قال الامام الطبرى ولم يشك احد انّهم من بقايا العماليق ولما ساقهم افريقس الحميرى بامر نبى الله داوود سمّوا البلاد التى سكنوا بها باسم الذى ساقهم اليها وهى افريقية ولما راءهم افريقس يُبَربرون صار يقول

بربرتْ كنعان لما سقتُها  من بلاد الصنك للخصب العجيب
الى ارض سكنوها ولقد  فازت البربر بالعيش الخصيب

- - - واما تسميتهم البربر فذالك لما صار ملك مِصْرَ لقيس غيلان كان له ولد يسمّى برّ فخرج مغاضبا لابيه واخوته الى ناحيه المغرب فقال الناس بر برّ اى توحّش فى البرارى فسموا بربرا I. e. *Imâm Taberistanensis dicit: Non est, qui dubitat, eos (Berberos) esse reliquias Amalekitarum, quas quum jubente Davide propheta Dei Afrikes Hhimjarita abduceret, terram, quam inhabitarunt nomine ducis Afrikam adpellarunt. Gentem vero suam murmurantem audiens Afrikes, dixit:*

*Canaan murmurat, quia eos a terra angusta in ubertatem pulcherrimam duxi;*

*In terram, ubi jam degunt et ubi Berberi vita potiti sunt opulenta.*

*---Quod ad denominationem eorum adtinet, Berber inquam, hanc ejus fuisse caussam referunt. Quum regnum Ægypti Keiso Ghailan obvenisset, filius ejus, cui nomen Berr erat, patri fratribusque iratus in regionem Meghrebi secessit; quare homines dixerunt:* Berr Berra i. e. *in desertum se subduxit. Unde nomen* Berber *postea ortum est.*

2) Opiniones heic recensitæ, quas potius ipsius gentis traditiones vocaverim, omnes in eo conveniunt, ut Berberos Afrikæ Aborigines esse negent, sed ex Oriente advectos quodammodo contendant. In oris Afrikæ Orientalis aliam quoque invenimus gentem, quæ, sive nomen (Berberah) sive linguam respexeris, haud paucas cum his Berberis similitudines præbet. Quamvis veram harum rerum rationem indigare nondum alicui obtigerit nec umquam forsan obtingat; omnem tamen fidem tot testimoniorum consensui denegare injuria videtur, si ipsa hominis natura et externa quoque forma et species huic sententiæ momentum haud leve addere valeat. (Cfr. *Ritter*, Erdkunde ed. sec. Tom. I, p. 907 et sæpius).

3) Secundum analogiam متالّة legi et verti; utrum recte nec ne affirmare non ausim.

4) Inter varias ٢٥ عِرْق significationes, nulla melius contextui quadrare videtur, quam: *mons*, vel *collis arenosus*. Ubique igitur rectius legendum *I'rk* ubi *A'rk* scripsi.

5) Sine dubio جامدة est scribendum. — Vocabulum قصر, quod postea sæpius occurrit, in genere aliquid *circumscriptum* et *determinatum* significat, unde facile ceteræ deriventur significationes. Quum inter has omnes, quæ in Lexicis exstant, nulla id exprimere mihi visa est, quod auctor intendit, aliam, secundum analogiam bene defendendam, auctoritate vero, quantum scio, destitutam recepi, et قصر per *Oasim* ubique verti. Me non fugit, hanc significationem, quamvis pluribus locis ea optime conveniat, in aliis tamen non omnino idoneam adparere.

6) In codice Musei Brit. hæc duo nomina ita scripta semper obveniunt, ut librarius hæsisse videatur, quænam eorum fuerit prima littera. Hæc enim figuram ostendit litteræ د, cujus pars superior longius extracta et ad sinistrum paullum inclinata, a forma ττ ﺩ tamen recedens. Si in *Luda* et *Lementit* scribendo recte conjecerim, haud statuo.

7) Spectat præcipue Ibn Khaldûn fortitudinem eorum et corporis robur. Sequentia e libro Kazvinensis عجائب البلدان inscripto (Ms. arab. Bibl. Reg. Paris. N:o DCCCXCIX pag. 104.) comparationis caussa, adfero: بلاد البربر واسعه من برقة الى اخر بلاد المغرب والبحر المحيط وسكانها امة عظيمة يقال انهم من بقية قوم جالوت لما قتل هرب قومه الى المغرب فحصلوا فى جبالها وهى اجفى خلق الله واكثرهم طيشا واسرعهم الى الفتنة واطوعهم لداعية الضلالة ولهم احوال عجيبة واصطلاحات غريبة سوّل لهم الشيطان الغوايات زين لهم انواع الضلّالات

8) "Initio," inquit Ibn Khaldûn, "multi Berberorum religionem magicam, sicut in Persia floruit, professi sunt; a Francis vero devicti magna eorum pars cultum victorum Christianum sunt amplexi. Alii autem, jam inde a tempore quo bella adversus Israelitas gesserant, Judaismo fuerunt addicti. Edriso illi Edrisitarum prosapiæ auctori gloria omnis infidelitatis vestigii apud eos eradicandi debetur. Duce A'bd allaho ben Sa'd ben A'li Serhh (سرح) anno XXIX (p. Chr. n. DCL) Muslimici primas in Afrikam expeditiones susceperunt. Ibi Rex Francorum eo tempore Gergir (جرجير) fuit, qui terram inter Tripolim et Tandjam, cujus caput erat Subeitela (سُبَيْطلة), tenuit. Quo devicto, Franci intra castella sese defenderunt. Pax tandem ea conditione facta est, ut trecenta Kintar auri Muslimicis penderentur, et hi deinde in orientem reversi sunt. Anno XLV (p. Chr. n. DCLX$\frac{V}{VI}$) Mua'vija ben Abi Sofian ducem suum Mua'vijam ben Khadidj cum exercitu heic misit, et, quamvis Græci auxilia mitterent, incolæ sunt devicti et Djelevla (جَلُولاء) capta. Ibn Khadidj mortuo O'kba ben Nafi successit, qui urbem Keirevân condidit. Jezid ben Mua'vija Abu-l Mehdjarum (مهجار) præfectum suum constituit. Hoc tempore dux Berberorum summus fuit Ke-

sila (كسيلة) e tribu Berâna oriundus, quem æque ac Francos O'kba ille plane devicit. Castellis eorum expugnatis, in Meghreb el Aksa penetravit O'kba usque ad montes Deren, ubi Mesmâdam bello petiit, quam tribum postea in Sus etiam debellavit. Keirevânum reversum una cum militibus, quos secum duxerat, Kesila interfecit, qui jam quinque annos hanc tenuit urbem. Sed anno LXVII (p. Chr. nat. DCLXXX$\frac{VI}{VII}$) Keis ben Zuheir, ut mortem O'kbæ vindicaret, adversus Kesilam profectus est, quem omnino superavit. Postquam vero Keis reverterat, status rerum in Afrika penitus est turbatus (fol. XLIX). Inter varios duces, qui jam heic exstiterunt, Cahina Dhebha (الكاهنة دبها), filia Nabæ ben Teifan (نابة بن تيفان), quæ montem Evras tenuit ejusque gentibus imperavit, maxime polluit. A'bd el Melik rex Hhassanum ben Ghassani præfectum Ægypti, ut Afrikam bello peteret, cum exercitu misit; et mandato ita functus est, ut anno LXIX Keirevanum intraret. Franci in Siciliam et Hispaniam confugerunt; Berberi autem duce Cahina Hhassanum fugarunt fugatumque Tripolim usque persecuti sunt, ubi A'bd el Melik eum commorari jussit. Ad annum usque LXXIV (p. Chr. n. DCXC$\frac{III}{IV}$), quo bellum Hhassan instauravit, Cahina tranquilla mansit. Jam vero, quum omnem regionem a Tripoli inde usque ad Tandjam devastasset, Berberi eam ob caussam irritati sese cum Hhassano adversus eam conjunxerunt, et copiis reginæ devictis, ipsam interfecerunt. Eodem tempore Berberi fidem Muslimicam professi sunt. Sed parum apud eos nova religio profecit. Musa igitur ben Nesir (نصير) præfectus Keirevani Tarikum ben Zijad Tandjæ præfecit eumque jussit, Koranum Berberos docere. Tempore demum, quo Musa et Tarik in Hispaniam transierunt, Islamismus apud eos vere stabilitus est censendus. Interea Berberi pluries rebellarunt. Anno enim CII (p. Chr. n. DCCXX—XXI) Jezidum ben Muslim Tandjæ occiderunt; et, imperante Khalifa Heschâm ben A'bd el Melik anno CXXII (p. Chr. n. DCCXL), Meisira Metferita (ميسيرة المطغرى) Amruum ben Abd allah ibidem adgressus trucidavit et A'bd ella'læ (الاعلا) ben Khadidj, origine Græco, fide Schiitæ sacramentum dixit. Paullo post vero imperium ipse capessivit, quod tanta

crudelitate gessit, ut Berberi ab eo desciscentes Khaledum ben Hhamid e gente Zenâta oriundum ducem elegerunt. Hic exercitu collecto adversus Arabes profectus est, quos duce Khaledo ben Hhabib, ab Elhhadjâb hoc tempore Afrikæ præfecto misso, prope Vadi Schelf devicit. Kelthum ben Kuscheiri A'jadh, cui præfectura jam commissa est, sequenti anno in Vadi Tandjæ a Khaledo ben Hhamid fugatus est et copiæ Arabum in diversas partes, Hispaniam, Keirevanum, et Barkam sese dissiparunt. Heschem tandem Hhandalam Ibn Sefvan Kelbi in Afrikam delegavit, qui Anno CXXIV Keirevanum advenit. Bellum deinde sine ulla intermissione continuatum est, donec anno CLXXXV (p. Chr. n. DCCCI) Ibrahim ben Aghleb sibi posterisque imperium vindicaret, quod ad annum CCLXXXXVI (p. Chr. n. DCCCLXXX$\frac{I}{II}$) tenuerunt. Tunc vero Ketâma eos fugavit et imperium Arabum in Afrika ita evanuit."

9) In nominibus berbericis scribendis adeo variant varii codices et scriptores, ut veritatem indagare difficillimum sit. In Kamuso (Cod. Upsal. Benzel. sub بربر) *Sunhadja* et *Kutama* scribuntur, et alibi quoque plura gentium nomina, prima littera vocali Dhamma mota, vidi. In iis nominibus ubi littera ج occurrit vero simile est, eam ut nostrum *G* ante *A* esse pronuntiandam, quod etiam ex diversa horum nominum scribendorum ratione, ك sæpius pro ج usurpato, abunde adparet. At certis regulis destitutus, sæpius in hac re errasse me confiteor, cujus rei veniam æqui judices facile dabunt.

1) Paullo aliter titulus et nomen auctoris apud Hadji Khalfam legitur: اكليل فى الانساب حميرة وملوكها لابى محمد الحسن احمد بن يعقوب اليمنى Auctor anno CCCXXXIV (p. Chr. n. DCCCCXL$\frac{V}{VI}$) Cfr. H. Khalf. ed. Flügel.

2) Librum heic indicatum in Hhadji Khalfa non reperi. Alius vero Cod. Bibl. Reg. Paris. DCCCLXXV) ibi exstat, sic inscriptus: نظم السلوكيه فى تواريخ الخلفا والملوك مختصر من الهجرة الى سنة ٨٠٦

للشيخ عبد الرحمان بن محمد البسطامى الحنفى, qui forsitan illius est compendium.

3) Ibn Khaldûn, ut supra vidimus, eum *Tejlutan* nominat, cujus patrem *Telacakin* adpellatum fuisse dicit. In genealogia vero Murabitorum eum omnino omisit. Quod si O'mar ben Verkub hujus Telakakin frater sit habendus, id quod ex hac genealogia necessario sequitur, regni intervallum haud breve, quod post mortem Temimi ita exsisteret, nullo modo explicari poterit, nisi plura nomina post Verkub ex tabula excidisse ponamus. In apographo ejusdem tabulæ, quem e cod. Leidensi N:o 1351 summa cura exscriptum mihi cel. Weyers benevole misit, eadem ac in cod. Mus. Brit. leguntur nomina. Quam ob rem errores, si qui sint, ab ipso auctore derivandi videntur. Paullo post Ibn Abi Zera' O'marum ben *Telacakin* ben Vejactin commemorat, cujus gentiles dynastiam Murabitorum constituerunt. Si hunc Telacakin eundem ac illum Ibn Khalduni faciamus, eadem in annis computandis difficultas heic quoque oritur, quam nulla alia via tollere possumus, nisi etiam hoc loco lacunam in majoribus enumerandis inesse statuamus.

4) In textu محمد بن تيفات معروف بتارسنا legendum puto, sicut nomen supra scriptum exstat.

5) Hoc loco, ut paullo post (ولم يجبه منهم احد ممن يرضاه الشيخ) insolitus vocis مَنْ pro ما usus observaudus est. Quum omnes, quos vidi, codices, in eadem lectione congruant, hæc enallage dialecto Meghrebi forsitan est adscribenda; vel melius ita explicari debet, ut مَنْ pro شى heic sit usurpatum, id quod *S. de Sacy* in Anthologie Grammaticale p. 464 sqq. jam observavit.

6) Cfr. quæ habet Reiske ad Abulf. II, pag. 151 (not. 105). Ceterum narratio Abulfedæ a Nostro valde discrepat.

7) Dombay: *Ben el Kadri* vertit. De *Kadaritis*, qui nomine Mutazilitarum etiam insigniuntur adeas *S. de Sacy:* Chrest. Arabe, 2:de Ed. p. 351 et sqq.

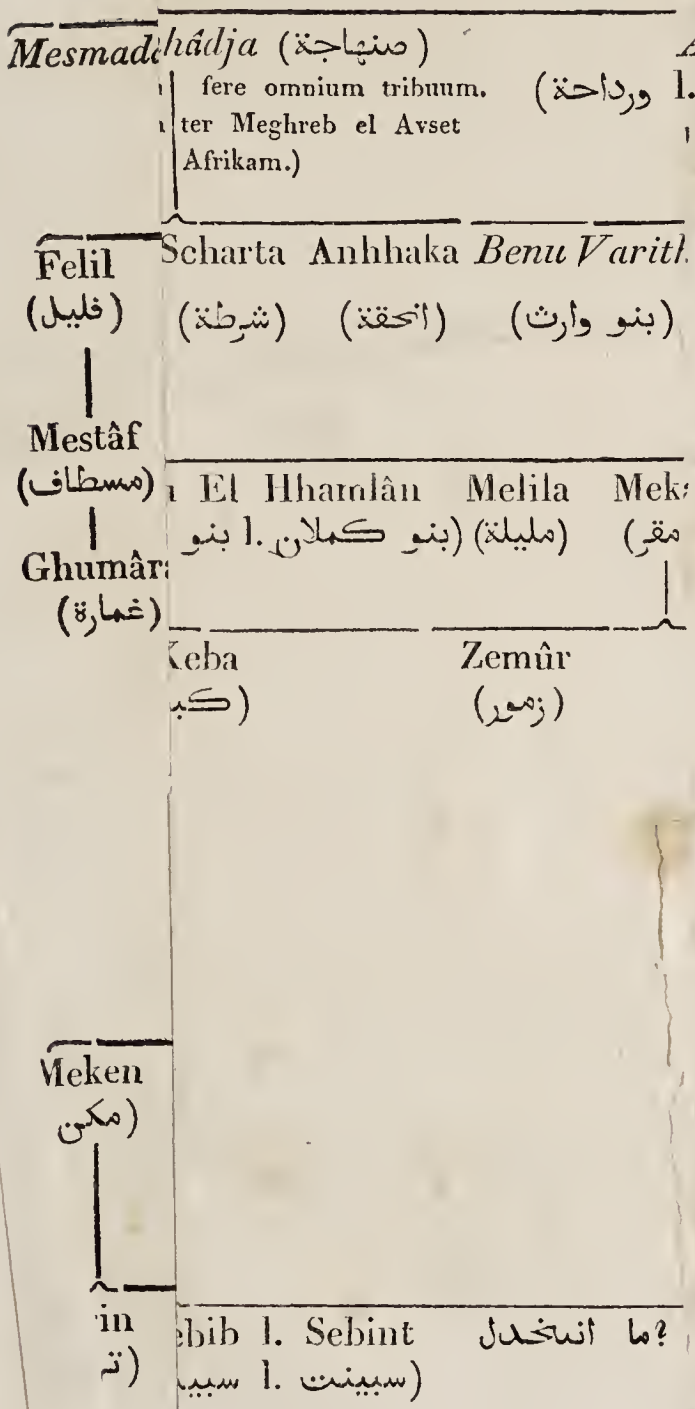
8) Adludit sine dubio ad effatum Korani, Sur. VII, 71, ubi de Salihhi prophetæ ad Themudæos missione mentio injicitur.

9) Petis de la Croix: *au nom de Bachus.* Lectorem non fugit manifesta vocis *Ja Kes*, cum vocabulo Græcorum Ἴακχος congruentia, quæ tamen, ni fallor, casu potius quam re ipsa orta mihi videtur.

## Corrigenda.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Pag. | 303 | l. | 5 | *diffirentia* leg. | *differentia* |
| — | 303 | — | 2 | *Moghrava* — | *Mughrâva* |
| — | 315 | — | 9 | ad *Ibn Khaldunum* 6) | adscribendum est. |
| — | 327 | — | 5 | infra *Kastilja* leg. | *Kastilija.* |
| — | 329 | — | 4 | infra *Ghomara* — | *Ghumâra* |
| — | 333 | — | 11 | *propriæm* — | *propriam* |
| — | 338 | — | 2 | صنهاَج — | صنهاَج |
| — | 361 | — | 3 | *Hhasûra* — | *Hhasuri* |
| — | 363 | — | 1 | *Fehcrita* — | *Feherita.* |

**em referunt.**


Mesmadâhâdja (صنهاجة)
fere omnium tribuum.
ter Meghreb el Avset
Afrikam.)
(ورداحة) l.
Felil (فليل)
Scharta (شرطة)
Anhhaka (انحقة)
Benu Varith (بنو وارث)
Mestâf (مسطاف)
El Hhamlân (بنو كملان) l. بنو
Melila (مليلة)
Mek (مقر)
Ghumâra (غمارة)
Keba (كب)
Zemûr (زمور)
Meken (مكن)
in (تم)
ebib l. Sebint (سبينت l. سبي)
ما انتخدل؟

# Corrigenda.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Pag. | 303 | l. | 5 | *diffirentia* leg. | *differentia* |
| — | 303 | — | 2 | *Moghrava* — | *Mughrâva* |
| — | 315 | — | 9 | ad *Ibn Khaldunum* 6) adscribendum est. | |
| — | 327 | — | 5 | infra *Kastilja* leg. | *Kastilija.* |
| — | 329 | — | 4 | infra *Ghomara* — | *Ghumâra* |
| — | 333 | — | 11 | *propriæm* — | *propriam* |
| — | 338 | — | 2 | صنهاج — | صنهاجَ |
| — | 361 | — | 3 | *Hhasúra* — | *Hhasuri* |
| — | 363 | — | 1 | *Fehcrita* — | *Feherita.* |

Tab. I.

## Genealogia Berberorum, qui ad BERNES originem referunt.

**Berber**

Bernes (برنس pl. برانس)

- *Mesmada* (مصمادة l. مصمودة)
  - Felil (فليل)
    - Mestâf (مسطاف)
      - Ghumâra (غمارة)
  - *Berghuata* (برغواطة) (Ad Temasnam et regiones montis Deren.)
  - *Hergha* (هرغة)
- *Ketama* (كتامة) (Ad Constantinam, usque ad montes Evrâs, Bedjâjam et Bnuam.)
  - Zevâva (زواوة)
  - Hentata (هنتاتة)
  - Tinmelel (تينملل)
  - Kedmûja (كدموية)
  - Kenfîsa (كنفيسة)
  - Seksajuva (سكسيوة)
  - Verîca (وريكة)
- *Heskûra* (هسكورة)
- *A'djîsa* (عجيسة) (Vehhran)
- *Euzigh* (اوزيغ) Matrem *Adasi* (vid. Tab. II) Hevvârum peperit. Deinde jonxerunt ob mutuam in matrimonium duxit Euzigh, eaque tribus Adâsæ se tribubus Hevvâræ consanguinitatem.
  - Hermîra (حرميرة)
  - Dekâla (دكالة)
  - Ragrâga (رگراگة)
  - Kalden (قلدن)
    - Bijâna (بيانة)
  - Meld (ملد)
    - Venif (ونيف)
  - *Hevvâr* (هوّار) (Ad Tripolin et Barkam.)
    - Melila (مليلة)
    - Asid (اسيد)
    - مسرات (Mesrât)
    - Verfel (ورفل)
    - Setat (سطط)
    - Bel (بل)
    - Temsâna (تمسانة)
    - Versatif (ورسطيف)
- *Sanhâdja* (صنهاجة) (Numerosissima et in deserto in Meghreb el Avset et Afrikam.)
  - *Lemtuna* (لمتونة)
  - *Gedâla* (چدالة)
  - *Mesûfa* (مسوفة)
  - Mendâsa (منداسة)
  - Scharta (شرطة)
  - Anhhaka (انحقة)
  - *Benu Varith* (بنو وارث)
  - *Belcâna* (بلكانة)
  - Mestâsa (مسطاسة) (Ad Vehhran)
    - Benu El Hhamlân (بنو كملان l. الحملان)
    - Melila (مليلة)
    - Mekar (مقر)
      - Keba (كبا)
      - Zemûr (زمور)
      - Haves (هاوس)
      - Mesrai (مسراى)
    - Lemta (لمطة)
    - Sanhadj (صنهاج)
- *Ardhâdja* (وردّاجة l. وردّاجة l. ازداجة) (Ad Vehhran)
- *Eureba* (اوربة al. اورية) (Caput regionis Velili)
  - Legâja (لجاية)
  - Anfâsa (انفاسة)
  - Biha? (بهحاء)
  - Remcuga (رمكوجة)
  - Mermâna (رمرمانة)
  - Ra'bua? (رعيوة)
  - Difusa (ديفوسة)
- *Lemta* (لمطة)
- *Guzûla* (چزولة) (In Sus et campis Deserto et monti Deren propinquis)

Tab. II.

## Genealogia Berberorum, qui ad MADGHISCH ELEBTER originem referunt.

**Berber**

Madghisch Elebter (مادغيش الابتر)

Regîk (رجيك)

- *Dharîsa* (ضريسة)
  - Temsit (تمصيت)
    - Fatn l. Kabn (قابن l. فاتن)
      - Mughîla (مغيله)
      - Medina (مدينة)
      - Sadjûna (صديونة) (Ad Tilimsen)
      - Methgara (مطغرة)
      - Lemaim (لمايم l. لماتة) (Ad Taherret)
      - Satfûra (صطفورة)
      - Mekrûra (مكرورة)
      - Keschâta (كشاتة l. كسانة)
      - Duna (دونة)
      - Cumija (كومية)
        - Nedrûma (ندرومة)
        - Seghâra (صغارة)
        - Benu Jelûl (بنو يلول) Rectius Benu Belul
      - Metmâta (مطماطة)
        - Evketa (اوكتة)
        - *Mecnâs* (مكنس)
        - Vertijag l. Varentag (ورتياج l. ورنتاج)
      - Versattaf (ورصطّف) (Vadi Melnia)
        - Meken (مكن)
          - Terin (ترين)
          - Tulalin (تولالين)
          - Gertn l. Hharin (جرتن l. حرين)
          - Fughâl (فوغال)
          - Besaltn l. Nesaltn (بصلتن l. نصلتن)
        - Kensâra l. Kejsâra (قنصارة l. قيصارة)
        - Verteklit (ورتقليت)
        - Urtedus (ورتدوس)
        - Vertîfa (ورتيفة)
        - Verfelâs (ورفلاس)
        - Mevalât (موالات)
        - Hharâth (حراث)
      - Agana l. Gana (اجانا l. جانا)
        - Henâta (هناطة)
        - Fulal (فولال)
        - Meknîsa (مكنيسة l. مكنسة)
        - Betalsa (بطالسة)
        - Sedrâga (سدراجة)
        - Kernit (كرنيط l. كرفيطة)
      - Semcân (سمكان)
        - Ferna (فرنى)
        - Versic (ورسيك)
        - Eldidet (الديدت)
        - Zevâra l. زوارة l. زوازة)
        - Zevâgha (زواغة)
          - Mager (ماجر)
          - Vatîl (واطيل)
      - Ferna Versic Eldidet Zevâra Zevâgha (Sec. Ibn Abi Zera' Gana filium habuit *Zenat*, unde tribus Zenata originem duxit, cujus filius Versic l. Versid originem Merinidis dedit.)
  - Duna (دونة)
  - Kalden (قلدن)
    - Bijâna (بيانة)
  - Sedrâna (سدرانة)
  - Zenâra (زنارة)
  - Merâta (مراتة l. مرانة)
    - Vasîn Fetnâsa (واسين فطناسة)
  - Acûra (اكورة)
  - A'zirva (عزيروة)
  - Mecâgha (مكاغة l. مغاغة)
  - Gedâna (جدانه)
- *Adâsa* (اداسة)
  - Evtita (اوطيطة)
  - Herâgha (هراغة)
  - Sanbera (صنبرة)
  - Vesfâta l. Vesfâra (وسفاتة l. وسفارة)
  - Abdâra (ابدارة l. ابرارة)
  - Henzûta (هنزوته l. هنزونة)
  - Berhena (برهنة)
- *Lava natu major* (لوى الاكبر)
  - *Lava natu minor* l. *Levâta* (لوى الاصغر)
    - Nebtet (نبطط)
    - Zair (زابر)
    - Masl (ماصل)
    - Ketûf (كتوف)
  - Nefzâva (نفزاوة) (Ad Keirevan anno 140 )
    - Betufet (بطوفت)
      - Mehhara (محرة)
      - Sermâta (سرماتة)
      - Zehîla (زهيلة)
      - Mernîsa (مرنيسة)
      - Vezic l. Resif (وزيك l. رسيف)
      - Verdîn (وردين)
      - Verdu'res (وردعوس)
      - Vercûl (وركول)
      - Valhâs l. Alhâs (والهاص l. الهاص)
        - Tenergasch l. Nebedhâ'sch (تنرغاش l. نبذحاس)
          - Verfedjûm (ورفجوم)
            - Schib l. Sebint (سبيب l. سبينت)
            - ما انمخدل؟
            - Kertit l. Korsit (كرطيت l. كرطيط)
            - Regâl (رجال)
            - Vengez (وڭز)
            - Nura'sch (نورعش)
            - Vetmu l. Vetu (وطو l. وتمو)
        - Dehhija (دحية)
          - Vertedin (ورتدين)
          - Nefvin (نفوين)
          - Vertijunt (ورتيونت)
          - Melin (ملين)
          - Veterjer (وتريّر)
      - Mecsûr (مكسور)
      - Zemur (زمور)
      - Matus (ماطوس)
  - Mecâgha (مكاغة l. مغاغة)
  - Gedâna (جدانه)
- *Nefûsa* (نفوسة) (Ad Tripolin)

# GENEA

Zâken
(زاكن)
|
يايوى
|
Muhammed
|
Tamgert
(تامجرت)
|
Teifelujit
(تيفلويت)
|
Abu Becr.

Omar
|
1. *Jahia* 2. *Abu B*
† 447 † 48

5. *Teschf*
† 540
|
6. *Ibrahi*
(Regno exut

# GENEALOGIA MURABITORUM.

Telmit i. e. Lemtuna
(تلميت وهو لمتونة)
|
Vathmel
(واثمل)
|
Amit (اميت)
|
Mesâla (مصالة)
|
Mansur
|
Mesâla
|
El-Mansur
|
Vertentek (ورتنطق l. وتيطق)
|
Varkut alii Tarkut (واركوت، تركوت l. وركوب)

Zâken (زاكن) — Omar — Ibrahim — Muhammed

Zâken (زاكن)
|
يايوى
|
Muhammed
|
Tamgert (تامجرت)
|
Teifelujit (تيفلويت)
|
Abu Becr.

Omar:
1. *Jahia* † 447
2. *Abu Becr* † 480
Mafu (مافو)

Ibrahim:
Teschfin
|
3. *Jusuf* † 500
|
4. *A'li* † 537
|
5. *Teschfin* † 540
|
6. *Ibrahim* (Regno exutus)

Muhammed:
Sabr (صبر) — Hhadir et Amin (حدير وامين) — Selimijun (سلميون) — Abu Becr. — Tilenkân (تيلنكان)

Sabr (صبر):
Tuzerkin (توزرقين)

Selimijun (سلميون):
Peregrinat. (ومجون للحاج)
|
A'li

Abu Becr.:
Seir (سير)

Tilenkân (تيلنكان):
Mezdeli (مزدلى)

Tuzerkin (توزرقين):
Vemgun
|
7. *Ishak* (Rex post Ibrah. b. Teschfin)